



普通高等教育“十三五”规划教材

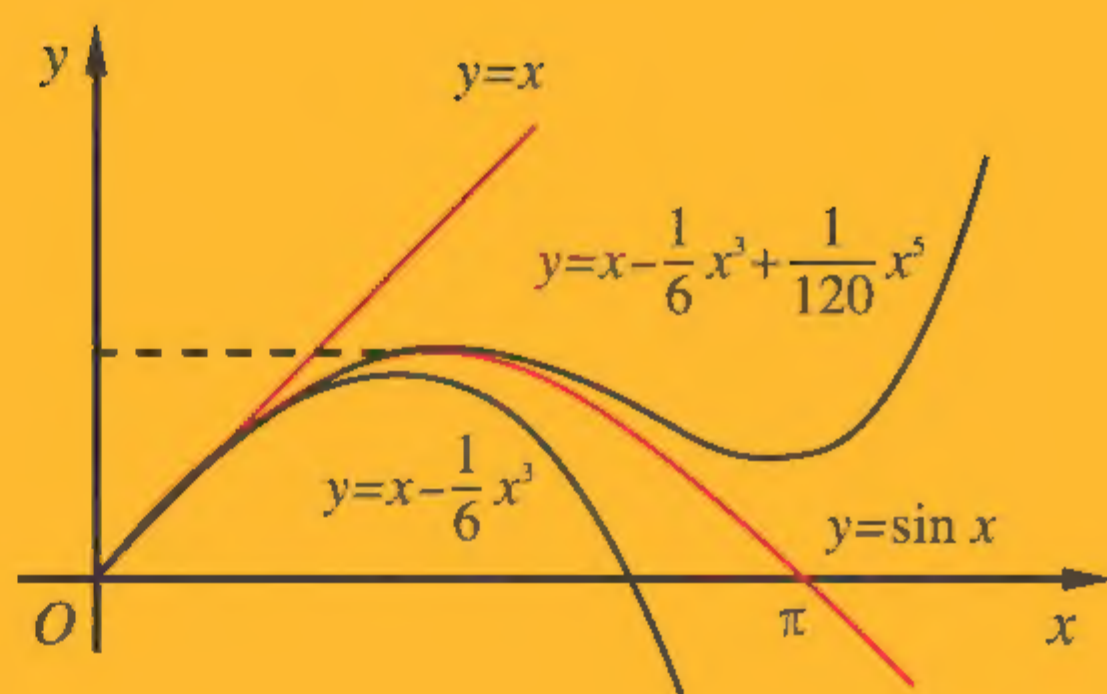
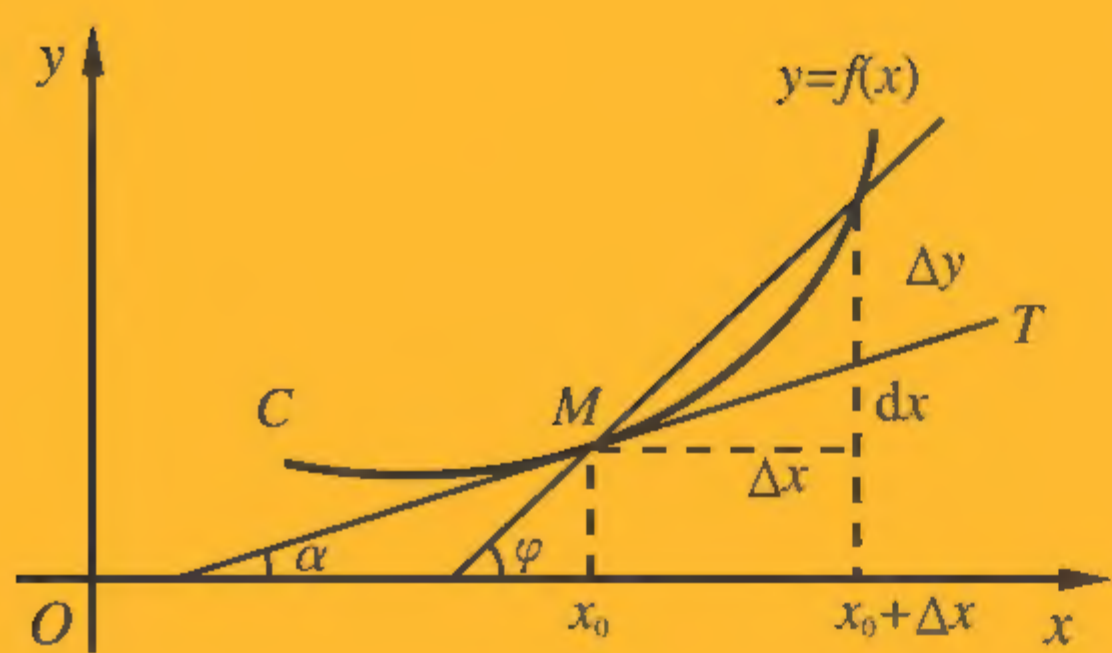
| 大学数学基础丛书 |

丛书主编 袁学刚 周文书 刘 满

# 微积分学习指导

## (上册)

王金芝 齐淑华 主编



清华大学出版社

大学数学基础丛书

# 微积分学习指导

## (上册)

王金芝 齐淑华 主编

清华大学出版社  
北 京



## 内 容 简 介

本学习指导是与我们编写的教材《微积分》配套辅导用书. 书中按教材章节顺序编排, 与教材保持一致. 全书共 5 章, 每章又分 4 个板块, 即大纲要求与重点内容、内容精要、题型总结与典型例题、课后习题解答, 以起到同步辅导的作用, 帮助学生克服学习中遇到的困难.

版权所有, 侵权必究. 侵权举报电话: 010-62782989 13701121933

### 图书在版编目(CIP)数据

微积分学习指导. 上册 / 王金芝, 齐淑华主编. —北京: 清华大学出版社, 2018  
(大学数学基础丛书)  
ISBN 978-7-302-51396-4

I. ①微… II. ①王… ②齐… III. ①微积分—高等学校—教学参考资料 IV. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 228433 号

责任编辑: 刘 颖  
封面设计: 傅瑞学  
责任校对: 刘玉霞  
责任印制: 董 瑾

出版发行: 清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址: 北京清华大学学研大厦 A 座

邮 编: 100084

社 总 机: 010-62770175

邮 购: 010-62786544

投稿与读者服务: 010-62776969, [c-service@tup.tsinghua.edu.cn](mailto:c-service@tup.tsinghua.edu.cn)

质量反馈: 010-62772015, [zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn](mailto:zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn)

印 装 者: 北京嘉实印刷有限公司

经 销: 全国新华书店

开 本: 185mm×260mm 印 张: 15.25

字 数: 488 千字

版 次: 2018 年 12 月第 1 版

印 次: 2018 年 12 月第 1 次印刷

定 价: 36.00 元

---

产品编号: 077724-01





本学习指导是与我们编写的教材《微积分》配套的辅导用书。

微积分是高等院校的重要基础课之一,它不仅是后续课程学习及在各个学科领域中进行研究的必要基础,而且对学生综合能力的培养起着重要的作用,同时更是考研数学试题的重要组成部分.为更好地指导学生学好这门课程,加深学生对所学内容的理解和掌握,提高其综合运用知识解决问题的能力,我们组织编写此书.本书按教材章节顺序编排,与教材保持一致.全书共5章,每章又分4个板块,即大纲要求及重点内容、内容精要、题型总结与典型例题、课后习题解答,对现行教材逐章逐节同步辅导.各板块具有以下特点:

1. 大纲要求及重点内容部分列出了国家教学大纲对本章内容的基本要求,帮助同学们明确本章应该掌握的数学概念及相关知识.
2. 内容精要部分对每章的内容都给出了简明的摘要,用以帮助读者理解和记忆本书中的主要概念、结论和方法,对本章有一个全局性的认识和把握.
3. 题型总结与典型例题部分,选取了近几年的考研题和竞赛题作为例题,并进行了详细的解答.每种题型的解法都具有代表性.读者可以通过典型例题既对这部分知识消化理解,掌握了常见的解题方法与技巧,又扩充了知识面,同时也做到举一反三,触类旁通.
4. 课后习题解答部分,是对《微积分》一书的课后习题的详细解答,用以帮助读者在完成课后习题遇到困难时参考、查阅.对于课后习题,希望读者在学习过程中,先独立思考,自己动手解题,然后再对照检查,不要依赖于解答.

本书既是大学本科学子学习微积分有益的参考用书,又是有志考研同学的良师益友,相信通过对本书的系统阅读,会对学好微积分有很大帮助.

本书由大连民族大学理学院组织编写,由王金芝、齐淑华主编,参加编写的有刘强、张誉铎、李娇.理学院领导和同事们对本书的编写提出了宝贵的意见和建议,在此表示感谢.

由于作者水平有限,难免有疏漏、不足或错误之处,敬请同行和广大读者指正.

编 者

2018年6月







<b>第 1 章 函数、极限和连续</b>	1
1.1 大纲要求及重点内容	1
1.2 内容精要	2
1.3 题型总结与典型例题	8
1.4 课后习题解答	33
<b>第 2 章 导数与微分</b>	63
2.1 大纲要求及重点内容	63
2.2 内容精要	63
2.3 题型总结与典型例题	66
2.4 课后习题解答	80
<b>第 3 章 微分中值定理与导数的应用</b>	99
3.1 大纲要求及重点内容	99
3.2 内容精要	99
3.3 题型总结与典型例题	103
3.4 课后习题解答	129
<b>第 4 章 不定积分</b>	157
4.1 大纲要求及重点内容	157
4.2 内容精要	157
4.3 题型总结与典型例题	159
4.4 课后习题解答	169
<b>第 5 章 定积分及其应用</b>	189
5.1 大纲要求及重点内容	189
5.2 内容精要	189
5.3 题型总结与典型例题	191
5.4 课后习题解答	203



## 1.1 大纲要求及重点内容

### 1. 大纲要求

- (1) 理解函数的定义,掌握函数定义的两个要素,会求函数的定义域,值域及函数值.
- (2) 加深对函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性等函数基本性质的了解,会判断函数的奇偶性、单调性,熟记一些常见的有界函数和周期函数.
- (3) 了解反函数的概念,会求反函数.理解复合函数的概念,会进行函数的复合运算和复合步骤的分解.
- (4) 掌握基本初等函数的函数关系式、定义域和值域、性质和图像.理解初等函数的概念,了解分段函数的概念及相关问题.
- (5) 会建立简单物理、经济等实际问题中的函数关系式,掌握一些常见的经济函数.
- (6) 理解极限的概念,会用两个重要极限求极限.
- (7) 了解无穷小、无穷大以及无穷小的阶的概念,会用等价无穷小代换求极限.
- (8) 理解函数在一点连续和在一个区间上连续的概念.了解函数间断点的概念,会判断间断点的类型;了解初等函数的连续性,会讨论简单初等函数和分段函数的连续性问题.
- (9) 了解闭区间上连续函数的性质,会用介值定理证明简单的命题.

### 2. 重点内容

- (1) 复合函数、反函数、分段函数、函数记号的运算、基本初等函数及其图像、初等函数的概念.
- (2) 准确理解极限的概念、性质和极限存在的条件,求出各种极限.
- (3) 比较无穷小的阶,用等价无穷小代换求极限.
- (4) 判断函数的连续性及其间断点的类型.
- (5) 利用零点存在定理证明方程根的存在性.



## 1.2 内容精要

### 1. 函数

#### (1) 函数的概念

① **函数** 设  $x$  和  $y$  是两个变量,  $D$  是一个给定的非空数集, 如果对于每个数  $x \in D$ , 变量  $y$  按照一定的对应法则  $f$  总有确定的数值和它对应, 则称  $y$  是  $x$  的函数, 记作  $y=f(x)$ .  $x$  叫做自变量,  $y$  叫做因变量, 数集  $D$  叫做这个函数的定义域.

一个函数当它的定义域及对应法则确定后, 这个函数就确定了, 所以, 定义域和对应法则称为函数的两要素.

**注:** 两个函数的定义域及对应法则相同, 则这两个函数相同, 而与自变量用什么表示无关. 如  $y=\sin x$  与  $y=\sin t$  是相同的函数.

② **定义域** 函数的定义域就是使函数  $y=f(x)$  有意义的自变量  $x$  的全体取值所组成的集合, 记作  $D(f)$ . 在实际问题中, 函数的定义域往往由问题的实际意义来确定.

#### (2) 函数的基本性质

① **有界性** 设数集  $X$  是函数  $f(x)$  的定义域的一个子集. 如果存在常数  $M$ , 使得:

- 对于任意  $x \in X$ , 有不等式  $f(x) \leq M$  成立, 则称函数  $f(x)$  在  $X$  上有上界.
- 对于任意  $x \in X$ , 有不等式  $f(x) \geq M$  成立, 则称函数  $f(x)$  在  $X$  上有下界.
- 对于任意  $x \in X$ , 有不等式  $|f(x)| \leq M$  (这里  $M > 0$ ) 成立, 则称函数  $f(x)$  在  $X$  上有界.

- 若对任意的  $M > 0$ , 都存在  $x \in X$ , 有  $|f(x)| \geq M$  成立, 则称函数  $f(x)$  在  $X$  上无界.

**注** 有界函数  $f(x)$  在  $X$  上的图像夹在两条平行线  $y=M, y=-M$  之间.

② **单调性** 设函数  $f(x)$  的定义域为  $D$ , 区间  $I \subset D$ , 对于  $I$  内任意两点  $x_1, x_2$ , 若:

- 当  $x_1 < x_2$  时, 恒有  $f(x_1) \leq f(x_2)$ , 则称函数  $f(x)$  在  $I$  内是单调增加的.
- 当  $x_1 < x_2$  时, 恒有  $f(x_1) \geq f(x_2)$ , 则称函数  $f(x)$  在  $I$  内是单调减少的.

**注** 单调增加函数的图像从左往右是上升的; 单调减少函数的图像从左往右是下降的.

③ **奇偶性** 设函数  $f(x)$  的定义域  $D$  关于原点对称, 如果:

- 对于任意  $x \in D$ , 恒有  $f(-x) = -f(x)$ , 则称  $f(x)$  为奇函数;
- 对于任意  $x \in D$ , 恒有  $f(-x) = f(x)$ , 则称  $f(x)$  为偶函数.

**注** 奇函数的图像关于原点对称; 偶函数的图像关于  $y$  轴对称.

④ **周期性** 对于函数  $f(x)$ , 如果存在一个不为零的数  $T$ , 使得对于定义域内的任何  $x$ ,  $x \pm T$  仍在定义域内, 且关系式  $f(x+T) = f(x)$  恒成立, 则称  $f(x)$  为周期函数.  $T$  称为它的一个周期.

**注** 函数的周期是指它的最小正周期; 周期为  $T$  的周期函数的图像, 在长度为  $T$  的任何区间上有相同的形状.

#### (3) 复合函数

若函数  $y=f(u)$  的定义域为  $D_1$ , 函数  $u=\varphi(x)$  在数集  $D_2$  上有定义, 对应的值域  $W_2 = \{u | u=\varphi(x), x \in D_2\}$ , 并且  $W_2 \subset D_1$ , 那么对于每个数值  $x \in D_2$ , 有确定的数值  $u \in W_2$  与  $x$



值对应. 由于这个值  $u$  也属于函数  $y=f(u)$  的定义域  $D_1$ , 因此有确定的值  $y$  与值  $u$  对应, 这样对于每个数值  $x \in D_2$ , 通过  $u$  有确定的数值  $y$  与  $x$  对应, 从而得到一个以  $x$  为自变量,  $y$  为因变量的函数, 这个函数称为由函数  $y=f(u)$  及  $u=\varphi(x)$  复合而成的复合函数, 记作  $y=f[\varphi(x)]$ , 而  $u$  称为中间变量.

**注** 不是任意两个函数都能复合成一个复合函数的. 复合函数可以有多个中间变量.

将  $u=\varphi(x)$  代入  $y=f(u)$  中的运算就是函数的复合运算; 从复合函数  $y=f[\varphi(x)]$  中分解出  $y=f(u)$  和  $u=\varphi(x)$  的运算就是分解复合步骤的运算.

函数的复合运算是不同于函数的四则运算及其他运算的一种独特的运算, 它具有内层函数与外层函数环环相扣的所谓“函数的函数”这样一个特征, 所以分清中间变量与自变量是理解和解决复合函数问题的关键, 对于一元函数和多元函数都是如此.

#### (4) 反函数

设  $y=f(x)$  在区间  $I$  上有定义, 对应的函数值集合为  $Y=\{y|y=f(x), x \in D\}$ , 如果对于每个数  $y \in Y$ , 按照对应法则  $f(x)=y$ , 在  $I$  中有唯一的数  $x$  与  $y$  对应, 则称这样得到的函数为  $y=f(x)$  在区间  $I$  上的反函数, 记为  $x=f^{-1}(y)$ , 或按字母使用习惯记为  $y=f^{-1}(x)$ . 而  $y=f(x)$  称为直接函数.

**注** 反函数定义域和值域与直接函数的值域和定义域对应相等. 互为反函数的两个函数的图像关于直线  $y=x$  对称.

#### (5) 基本初等函数

常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为基本初等函数.

#### (6) 初等函数

由常数及基本初等函数经过有限次四则运算及有限次的复合步骤所构成, 并且可以用一个式子表示的函数, 叫做初等函数. 是否为初等函数主要取决于函数中的运算是否为四则运算和复合运算, 并且运算的次数是否为有限次.

#### (7) 分段函数

在定义域的不同部分用不同的解析式来表示的函数就是分段函数. 由于分段函数是一个函数, 所以它的定义域是各段定义域的并集. 讨论分段函数时, 还要特别注意在相邻两段分段点处函数是如何定义的.

#### (8) 常见的经济函数

收入函数  $R=R(x)$ , 成本函数  $C=C(x)$ , 利润函数  $L=L(x)=R(x)-C(x)$ , 需求函数  $x=x(P)$ , 供应函数  $Q=Q(P)$  都是常见的经济函数, 其中  $x$  表示产(销)量,  $P$  表示价格, 每个具体的经济函数要根据实际的经济问题来确定.

## 2. 极限

#### (1) 数列极限、函数极限定义(略)

#### (2) 无穷小与无穷大

**无穷小** 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)=0$  (或  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)=0$ ), 就称函数  $f(x)$  当  $x \rightarrow x_0$  (或  $x \rightarrow \infty$ ) 时为无穷小.

**注** ① 无穷小是以 0 为极限的变量.

② 说到无穷小, 必须指明自变量的变化过程.



③ 无穷小与绝对值很小的数不能混为一谈.

④ 零是唯一可以作为无穷小的常数.

**无穷大**

① 若  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) = \infty$ , 则称函数  $f(x)$  当  $x \rightarrow x_0 (x \rightarrow \infty)$  时为无穷大.

② 若  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) = +\infty$ , 则称函数  $f(x)$  当  $x \rightarrow x_0 (x \rightarrow \infty)$  时为正无穷大.

③ 若  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) = -\infty$ , 则称函数  $f(x)$  当  $x \rightarrow x_0 (x \rightarrow \infty)$  时为负无穷大.

**注** ① 无穷大是变量.

② 说到无穷大, 必须指明自变量的变化过程.

③ 无穷大与绝对值很大的数不能混为一谈.

**等价无穷小代换** 若  $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$ , 且  $\lim \frac{\beta'}{\alpha'}$  存在, 则  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}$ .

这表明, 求两个无穷小之比的极限时, 可以用等价无穷小来代替.

(3) 函数的连续性

① 连续的定义

**定义 1** 记  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ , 称为  $f(x)$  在  $x_0$  的增量, 若  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$ , 则称  $f(x)$  在  $x_0$  处连续.

**定义 2** 设  $f(x)$  在点  $x_0$  的某邻域内有定义, 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , 则称  $f(x)$  在  $x_0$  处连续,  $x_0$  称为  $f(x)$  的连续点.

**注** ① 连续函数的图像是一条连续不间断的曲线. ② 一般的证明性命题用函数连续的第一个定义较方便; 判断函数在某点连续, 尤其是判断分段函数在分段点处是否连续用定义 2 较方便.

② 单侧连续

• 若  $f(x)$  在点  $x_0$  的某个左邻域内有定义, 且  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$ , 则称  $f(x)$  在  $x_0$  点左

连续;

• 若  $f(x)$  在点  $x_0$  的某个右邻域内有定义, 且  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$ , 则称  $f(x)$  在  $x_0$  点右

连续.

$f(x)$  在  $x_0$  点连续的充要条件是  $f(x)$  在  $x_0$  点既左连续, 又右连续, 即

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

**区间上连续** 若函数  $f(x)$  在开区间  $(a, b)$  内每一点处都连续, 则称  $f(x)$  在  $(a, b)$  内连续; 若  $f(x)$  在  $(a, b)$  内连续, 且  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ ,  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$ , 则称  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续.

③ 间断点

**定义** 若  $f(x)$  在  $x_0$  处出现以下 3 种情形之一:

•  $f(x)$  在  $x_0$  处无定义;

•  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  不存在;



- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$ ,

则称  $f(x)$  在  $x=x_0$  处间断, 称  $x_0$  为  $f(x)$  的间断点.

**间断点的类型** 设  $x_0$  为  $f(x)$  的间断点.

**第一类间断点**  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  与  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  都存在,  $x_0$  称为  $f(x)$  的第一类间断点. 第一类间断点分为可去与跳跃两类:

- 可去间断点:  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  与  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  都存在且相等.
- 跳跃间断点:  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  与  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  都存在但不相等.

**第二类间断点**  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  与  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  中至少有一个不存在, 则称  $x_0$  为  $f(x)$  的第二类间断点.

- 无穷间断点:  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  与  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  中至少有一个极限为无穷大.
- 振荡间断点:  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  与  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  中至少有一个极限不存在且振荡.

### 3. 重要公式和定理

#### (1) 重要公式

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

$$\text{推广} \quad \lim_{\varphi(x) \rightarrow 0} \frac{\sin \varphi(x)}{\varphi(x)} = 1, \quad \lim_{\varphi(x) \rightarrow 0} (1+\varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}} = e, \quad \lim_{\varphi(x) \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\varphi(x)}\right)^{\varphi(x)} = e.$$

$$\textcircled{2} \text{ 抓大头公式 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^m}{b_0 x^n} = \begin{cases} \infty, & m > n, \\ \frac{a_0}{b_0}, & m = n, m, n > 0, \\ 0, & m < n, \end{cases}$$

何谓“抓大头”, 即分子分母都抓最大那一项, 同一数量级的认为不能忽略.

#### ③ 常用极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 (a > 0); \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 (|q| < 1); \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0 (a > 0);$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = \infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{x}} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^p}{a^x} = 0 (a > 0, p > 0);$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arccot} x = \pi; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arccot} x = 0.$$

#### ④ 无穷小的比较 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0, \lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) = 0$ .

$$\text{若 } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \begin{cases} 0, & \text{则称 } \alpha(x) \text{ 是 } \beta(x) \text{ 的高阶无穷小, 记为 } \alpha(x) = o(\beta), \\ \infty, & \text{则称 } \alpha(x) \text{ 是 } \beta(x) \text{ 的低阶无穷小,} \\ C (C \neq 0), & \text{则称 } \alpha(x) \text{ 是 } \beta(x) \text{ 的同阶无穷小,} \\ 1, & \text{则称 } \alpha(x) \text{ 是 } \beta(x) \text{ 的等价无穷小, 记为 } \alpha(x) \sim \beta(x). \end{cases}$$

若  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta^k(x)} = C (C \neq 0), k > 0$ , 则称  $\alpha(x)$  是  $\beta(x)$  的  $k$  阶无穷小.



## ⑤ 无穷小的阶的运算法则

若  $x \rightarrow 0$ , 则:

- $m > n, o(x^m) + o(x^n) = o(x^n), o(x^n) \pm o(x^n) = o(x^n);$
- $o(kx^n) = o(x^n);$
- $x^m o(x^n) = o(x^{m+n});$
- 若  $\varphi(x)$  有界时, 则  $\varphi(x) o(x^n) = o(x^n);$
- $o(x^m) \cdot o(x^n) = o(x^{m+n}).$

## ⑥ 关于等价无穷小

- 当  $x \rightarrow 0$  时,  $x^n + x^m \sim x^{\min\{m, n\}};$
- 当  $\varphi(x) \rightarrow 0$  时,  $\varphi(x) + o(\varphi(x)) \sim \varphi(x).$

例如, 当  $x \rightarrow 0$  时,  $x^3 = o(3x)$ , 则  $x^3 + 3x \sim 3x; 1 - \cos x = o(x)$ , 则  $x + (1 - \cos x) \sim x.$

- 当  $x \rightarrow 0$  时

$$\sin x \sim x, \quad \tan x \sim x, \quad \arcsin x \sim x, \quad \arctan x \sim x, \quad \ln(1+x) \sim x,$$

$$e^x - 1 \sim x, \quad a^x - 1 \sim x \ln a, \quad 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, \quad (1+x)^a - 1 \sim ax.$$

当  $x \rightarrow 0^+$  时,  $x^x - 1 = e^{x \ln x} - 1 \sim x \ln x.$

当  $x \rightarrow 1$  时,  $\ln x \sim x - 1.$

- 推广 将上面的  $x$  都换成  $\varphi(x)$  等价仍成立, 即当  $\varphi(x) \rightarrow 0$  时

$$\sin \varphi(x) \sim \varphi(x), \quad \tan \varphi(x) \sim \varphi(x), \quad \arcsin \varphi(x) \sim \varphi(x), \quad \arctan \varphi(x) \sim \varphi(x),$$

$$a^{\varphi(x)} - 1 \sim \varphi(x) \ln a, \quad \ln(1 + \varphi(x)) \sim \varphi(x), \quad e^{\varphi(x)} - 1 \sim \varphi(x),$$

$$(1 + \varphi(x))^a - 1 \sim a\varphi(x), \quad 1 - \cos \varphi(x) \sim \frac{1}{2}\varphi(x)^2.$$

当  $\varphi(x) \rightarrow 1$  时,  $\ln \varphi(x) \sim \varphi(x) - 1.$

- 更进一步的等价我们也经常用, 求极限时更简便(由第3章的泰勒公式可推导下面的等价关系).

当  $x \rightarrow 0$  时

$$\sin x - x \sim -\frac{1}{6}x^3; \quad \arcsin x - x \sim \frac{1}{6}x^3;$$

$$\tan x - x \sim \frac{1}{3}x^3; \quad \arctan x - x \sim -\frac{1}{3}x^3;$$

$$\tan x - \sin x \sim \frac{1}{2}x^3; \quad e^x - 1 - x \sim \frac{1}{2}x^2; \quad \ln(1+x) - x \sim -\frac{1}{2}x^2.$$

将上面的  $x$  都换成  $\varphi(x)$  等价关系仍成立.

## ⑦ 求两个无穷小比的极限时, 可用等价无穷小的代换

设  $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$ , 且  $\lim \frac{\beta'}{\alpha'}$  存在, 则  $\lim \frac{\beta}{\alpha}$  也存在, 且  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}.$

这是因为  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \left( \frac{\beta}{\beta'} \cdot \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \frac{\alpha'}{\alpha} \right) = \lim \frac{\beta}{\beta'} \lim \frac{\beta'}{\alpha'} \lim \frac{\alpha'}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}.$

在求无穷小比的极限, 而分子或分母为两个无穷小的和或差时, 可用等价无穷小代换:

设  $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$ , 若:



$\lim_{\beta'} \frac{\alpha'}{\beta'} \neq 1$ , 则在求极限时可用等价无穷小代换  $\alpha - \beta \sim \alpha' - \beta'$ ;

$\lim_{\beta'} \frac{\alpha'}{\beta'} \neq -1$ , 则在求极限时可用等价无穷小代换  $\alpha + \beta \sim \alpha' + \beta'$ .

例如, 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x - \sin x}{\ln(1+5x) - (e^x - 1)}$ . 因为

$$\tan 3x \sim 3x, \sin x \sim x, \ln(1+5x) \sim 5x, e^x - 1 \sim x,$$

且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{x} = 3 \neq 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+5x)}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{x} = 5 \neq 1$ , 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x - \sin x}{\ln(1+5x) - (e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - x}{5x - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{4x} = \frac{1}{2}.$$

## (2) 数列极限的性质及判定

收敛数列的性质:

- ① 若  $\{x_n\}$  收敛, 则其极限唯一;
- ② 若  $\{x_n\}$  收敛, 则  $\{x_n\}$  有界, 其逆不真.

收敛数列的判别法:

- ① 单调有界数列  $\{x_n\}$  必有极限;

- ② 夹逼定理 设存在自然数  $N$ , 当  $n > N$ , 恒有  $y_n \leq x_n \leq z_n$ , 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = l$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l.$$

## (3) 函数极限的重要定理

定理 1(常用于判别函数的连续性)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$ .

定理 2(常用于极限的证明或计算中)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$ , 其中

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0.$$

定理 3(函数极限的保号性定理) 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, A > 0$  (或  $A < 0$ ), 则存在一个  $\delta > 0$ , 当  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), x \neq x_0$  时,  $f(x) > 0$  (或  $f(x) < 0$ ).

定理 4(函数极限的保号性定理的逆定理) 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, f(x) > 0$  (或  $f(x) < 0$ ) 则  $A \geq 0$  (或  $A \leq 0$ ).

定理 5(夹逼准则, 常用于求极限) 设在  $x_0$  的邻域内, 恒有  $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$ , 且  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = A$ , 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ .

## 定理 6(无穷小的运算性质及规律)

- ① 有限个无穷小的代数和仍为无穷小;
- ② 有限个无穷小的乘积仍为无穷小;
- ③ 有界函数与无穷小的乘积仍为无穷小;
- ④  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = A$  且  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$ , 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ ;
- ⑤  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$  且  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ , 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ .

定理 7(无穷小与无穷大的关系定理) 在自变量的同一变化过程中, 如果  $f(x)$  为无穷小, 且  $f(x) \neq 0$ , 则  $\frac{1}{f(x)}$  为无穷大; 反之, 如果  $f(x)$  为无穷大, 则  $\frac{1}{f(x)}$  为无穷小.



**定理 8(初等函数的连续性)** 初等函数在其定义域子区间上连续.

**定理 9(闭区间上连续函数的性质)**

- ① (连续函数的有界性) 若函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有界;
- ② (最值定理) 若函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 则在  $[a, b]$  上  $f(x)$  能取得最大值与最小值;
- ③ (介值定理) 若函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且  $\mu$  介于  $f(a), f(b)$  之间, 则在  $[a, b]$  上存在  $\xi$  使得  $f(\xi) = \mu$ ;
- ④ (零点存在定理或根的存在定理) 若函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , 则在  $(a, b)$  内至少存在一点  $\xi$ , 使得  $f(\xi) = 0$ .

### 1.3 题型总结与典型例题

**重点题型** 1. 求函数的极限; 2. 无穷小的比较与阶的确定; 3. 极限中常数的确定; 4. 判断函数的连续性及间断点的类型, 特别是分段函数在分段点处的连续性; 5. 闭区间上连续函数的零点定理和介值定理.

#### 1. 函数及其性质

##### 题型 1-1 函数的定义域

**【解题思路】** 求函数的定义域时, 一般要根据分母不为零, 负数不能开偶次方、负数和零无对数,  $k\pi$  无余切,  $k\pi \pm \frac{\pi}{2}$  无正切, 以及绝对值大于 1 时无反正弦和反余弦等原则列出不等式(组), 求得其解即为所求函数的定义域.

**例 1.1** 求函数  $f(x) = \lg(4-x) + \sqrt{x^2+3x-10}$  的定义域.

**解** 依题意  $\begin{cases} 4-x > 0, \\ x^2+3x-10 \geq 0, \end{cases}$  解之得  $2 \leq x < 4$ , 即函数的定义域为  $\{x \mid 2 \leq x < 4\} = [2, 4)$ .

**例 1.2** 设  $f(x)$  的定义域为  $[0, 3]$ , 求  $g(x) = f(\tan^2 x)$  的定义域.

**解** 因为  $f(x)$  的定义域为  $[0, 3]$ , 所以  $0 \leq \tan^2 x \leq 3$ , 由  $\tan^2 x \leq 3$ , 得到  $-\sqrt{3} \leq \tan x \leq \sqrt{3}$ , 因而  $\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) \leq \tan x \leq \tan \frac{\pi}{3}$ .

由  $\tan x$  的周期性, 得  $g(x)$  的定义域为  $\left\{x \mid k\pi - \frac{\pi}{3} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{3}\right\}$ .

**例 1.3** 函数  $f(x)$  的定义域为  $[0, 1]$ , 求  $f(a+x) + f(a-x)$  ( $a > 0$ ) 的定义域.

**解** 因为函数  $f(x)$  的定义域为  $[0, 1]$ , 故函数  $f(a+x) + f(a-x)$  的  $x$  应满足

$$\begin{cases} 0 \leq a+x \leq 1, \\ 0 \leq a-x \leq 1, \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} -a \leq x \leq 1-a, \\ a-1 \leq x \leq a. \end{cases}$$

因为  $a > 0$ , 所以有  $-a < a$ . 当  $a-1 \leq 1-a$  时, 上面的不等式组有解, 否则无解, 即当  $0 < a \leq 1$  时, 不等式组有解.

当  $a \leq a-1$ , 即  $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$  时, 不等式组的解如图 1-1(a) 所示, 函数的定义域为  $[a-1, a]$ .



$1-a]$ . 当  $a \geq a-1$ , 即  $a \leq \frac{1}{2}$  时, 不等式组的解如图 1-1(b) 所示, 函数的定义域为  $[-a, a]$ .

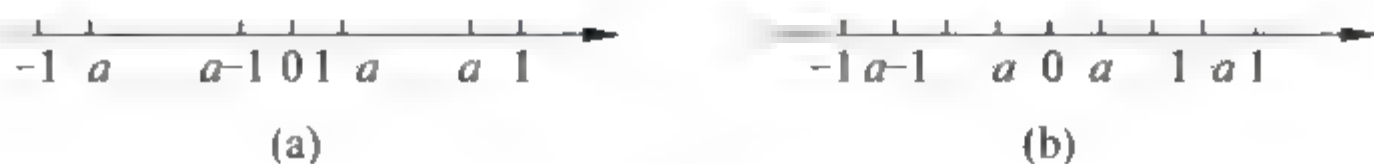


图 1-1

### 题型 1-2 函数概念的理解

**【解题思路】** 函数关系式的确定只取决于函数的定义域和函数对应关系, 定义域和对应法则相同表示同一函数.

**例 1.4** (1) 函数  $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$  与  $g(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$  是否为同一函数.

(2) 函数  $f(x) = x$  与  $g(x) = \sqrt{x^2}$  是否为同一函数.

(3) 设  $f(x) = \begin{cases} 3^x, & x \geq 1, \\ \arcsin x, & -1 < x < 1, \\ 1+x, & x \leq -1, \end{cases}$  求  $f(-3), f\left(\frac{1}{2}\right), f(2)$ .

**解** (1) 是. 由于  $f(x)$  与  $g(x)$  的定义域都是  $-1 < x < 1$ , 对应法则也相同, 所以它们是同一函数.

(2) 不是. 虽然  $f(x)$  与  $g(x)$  的定义域都是  $(-\infty, +\infty)$ , 但它们的对应法则不一样, 所以它们不是同一函数.

(3)  $f(-3) = 1 + (-3) = -2, f\left(\frac{1}{2}\right) = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}, f(2) = 3^2 = 9$ .

### 题型 1-3 函数的简单性态的判别

**【解题思路】** 函数的奇偶性和周期性是在定义域上讨论的, 而单调性和有界性是在有定义的某区间上讨论的.

**例 1.5** 设  $f(x) = \frac{x^2+3}{x^2+5}$ , 证明  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上有界.

**证明** 因为  $|f(x)| = \left| \frac{x^2+3}{x^2+5} \right| \leq 1 + \left| \frac{2}{x^2+5} \right| \leq 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5}$ , 所以  $f(x) = \frac{x^2+3}{x^2+5}$  在  $(-\infty, +\infty)$  上有界.

**例 1.6** 证明函数  $y = \frac{x}{1-x}$  在  $(-\infty, 1)$  内单调增加.

**证明** 任取  $x_1, x_2 \in (-\infty, 1)$ , 不妨设  $x_1 < x_2$ , 则有

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{x_1}{1-x_1} - \frac{x_2}{1-x_2} = \frac{x_1 - x_2}{(1-x_1)(1-x_2)} < 0, \text{ 即 } f(x_1) < f(x_2),$$

故函数  $y = \frac{x}{1-x}$  在  $(-\infty, 1)$  内单调增加.

**例 1.7** 设  $f(x)$  是周期为 6 的奇函数, 且  $f(x) = x^2 - 2x, x \in [0, 3]$ , 求  $f(11)$ .

**解**  $f(11) = f(5+6) = f(5) = f(-1+6) = f(-1) = -f(1) = -(1^2 - 2 \times 1) = 1$ .



## 题型 1-4 求复合函数

**【解题思路】** 函数的复合运算是不同于函数的四则运算及其他运算的一种独特运算,它具有内层函数与外层函数环环相扣的所谓“函数的函数”这样一种特征,所以分清中间变量与自变量是理解 and 解决复合函数问题的关键.

**例 1.8** 将下列函数拆开成若干基本初等函数:

$$(1) y = \sin^3(1+2x); \quad (2) y = 10^{(2x-1)^2}.$$

解 (1)  $y = u^3, u = \sin v, v = 1+2x$ ; (2)  $y = 10^u, u = v^2, v = 2x-1$ .

**例 1.9** 设  $y = f(u) = \arctan u, u = \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}, t = \phi(x) = x^2 - 1$ , 求  $f\{\varphi[\phi(x)]\}$ .

解 由题意得  $\varphi(\phi(x)) = \frac{1}{\sqrt{\phi(x)}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ , 故  $f\{\varphi[\phi(x)]\} = \arctan \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ .

**例 1.10** 设  $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ , 求  $f(x)$ .

解 因为  $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$ , 令  $u = x + \frac{1}{x}$ , 则  $f(u) = u^2 - 2$ , 故  $f(x) = x^2 - 2$ .

## 题型 1-5 分段函数

**【解题思路】** 讨论分段函数时,要注意自变量变化的每一段上的函数关系.

**例 1.11** 设分段函数  $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \leq 0, \\ x^2 + \ln x, & x > 0, \end{cases}$  求  $f(1-x), f(x-1)$ .

解  $f(1-x) = \begin{cases} \sin(1-x), & 1-x \leq 0, \\ (1-x)^2 + \ln(1-x), & 1-x > 0, \end{cases}$  即

$$f(1-x) = \begin{cases} \sin(1-x), & x \geq 1, \\ (1-x)^2 + \ln(1-x), & x < 1. \end{cases}$$

类似地  $f(x-1) = \begin{cases} \sin(x-1), & x \leq 1, \\ (x-1)^2 + \ln(x-1), & x > 1. \end{cases}$

## 2. 数列的极限

## 题型 1-6 收敛数列的性质

**【解题思路】** 收敛的数列极限唯一;收敛的数列有界;收敛数列具有保号性;收敛数列的任何子列都收敛并具有相同的极限. 有界数列不一定收敛;无界数列一定发散. 收敛数列与发散数列的和发散;两个发散数列的和可能收敛也可能发散;收敛数列(极限不为零)与发散数列的积发散.

**例 1.12** 选择题

(1) 数列收敛是数列有界的( ).

A. 必要条件      B. 充分条件      C. 充要条件      D. 无关条件

(2) 下列数列中收敛的是( ).

A.  $\{n\}$       B.  $\{(-1)^n\}$       C.  $\left\{\frac{1}{n}\right\}$       D.  $\{\sin n\}$



解 (1) 选 B; (2) 选 C.

### 题型 1-7 含根式差的极限计算

**【解题思路】** 凡函数的表达式中含有  $a + \sqrt{b}$  (或  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ ), 则在运算前通常要在分子分母乘以其共轭根  $a - \sqrt{b}$  (或  $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ ), 反之亦然, 然后再做有关的运算.

例 1.13 求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} [\sqrt{1+2+\cdots+n} - \sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}];$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\sqrt{n^2+1}\pi);$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} |\sin(\pi \sqrt{n^2+n})|.$$

解 (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} [\sqrt{1+2+\cdots+n} - \sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}]$  (先求根号下的和)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} - \sqrt{\frac{n(n-1)}{2}} \right] \quad (\text{分子有理化})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2n}{\sqrt{n(n+1)} + \sqrt{n(n-1)}} \quad (\text{抓大头})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2n}{\sqrt{n^2} + \sqrt{n^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\sqrt{n^2+1}\pi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin[(\sqrt{n^2+1}\pi - n\pi) + n\pi]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \sin(\sqrt{n^2+1}\pi - n\pi) \quad (\text{分子有理化})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1} + n} \quad (\text{等价无穷小代换})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1} + n} = 0.$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} |\sin(\pi \sqrt{n^2+n})| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\sin(\pi \sqrt{n^2+n} - n\pi + n\pi)|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} |(-1)^n \sin(\pi \sqrt{n^2+n} - n\pi)|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} |\sin(\pi \sqrt{n^2+n} - n\pi)|$$

$$= \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\pi}{\sqrt{n^2+n} + n} \right|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sin \left( \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} \pi \right) \right| = \sin \frac{\pi}{2} = 1.$$

题型 1-8 单调有界必有极限证明数列极限的存在性, 并求之, 适用于  $x_{n+1} = f(x_n)$ .

**【解题思路】** 由递推关系  $x_{n+1} = f(x_n)$  定义的数列的极限问题, 一般用单调有界必有极限. 解题步骤: (1) 直接对通项进行分析或用数学归纳法验证数列  $\{x_n\}$  单调有界; (2) 设  $\{x_n\}$  的极限存在, 记为  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$ , 将其代入给定的  $x_n$  的表达式中, 则该式变为  $l$  的代数方程, 解之得该数列的极限.

证明数列  $\{x_n\}$  单调性的常用方法:

(1) 计算差  $d_n = x_{n+1} - x_n$ , 若  $d_n \leq 0$  (或  $d_n \geq 0$ ), 则  $\{x_n\}$  单调减少 (增加);



(2) 若  $x_n > 0$ , 计算商  $r_n = \frac{x_{n+1}}{x_n}$ , 若  $r_n \leq 1$  (或  $r_n \geq 1$ ), 则  $\{x_n\}$  单调减少 (增加);

(3) 用数学归纳法证明之;

(4) 记  $x_n = f(n)$ , 若  $f(x) (x \geq 1)$  可导, 则  $f'(x) \leq 0$  (或  $f'(x) \geq 0$ ) 时,  $\{x_n\}$  单调减少 (增加).

**例 1.14** 设  $x_1 = \sqrt{a}, x_{n+1} = \sqrt{a+x_n} (a > 0) (n=1, 2, \dots)$ , 试证数列  $\{x_n\}$  极限存在, 并求此极限.

**证明** 用数学归纳法证明数列  $\{x_n\}$  单调增加.

由  $x_1 = \sqrt{a}, x_2 = \sqrt{a+x_1} > \sqrt{a} = x_1$ , 知  $x_1 < x_2$ , 即  $n=1$  时, 有  $x_n < x_{n+1}$ . 设  $n=k$  时, 不等式  $x_n < x_{n+1}$  成立. 由  $x_{k+1} = \sqrt{a+x_k} < \sqrt{a+x_{k+1}} = x_{k+2}$  可知,  $n=k+1$  时, 不等式  $x_n < x_{n+1}$  也成立, 因而对一切的自然数  $n$ , 不等式  $x_n < x_{n+1}$  总成立.

又  $x_1 = \sqrt{a} < \sqrt{a} + 1$ . 设  $n=k$  时,  $x_k < \sqrt{a} + 1$ , 则当  $n=k+1$  时, 有

$$x_{k+1} = \sqrt{a+x_k} < \sqrt{a+\sqrt{a}+1} < \sqrt{a+2\sqrt{a}+1} = \sqrt{(\sqrt{a}+1)^2} = \sqrt{a}+1.$$

可知  $\{x_n\}$  有界, 由单调有界准则可知原数列有极限.

设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$ , 等式  $x_{n+1} = \sqrt{a+x_n}$  两边取极限得  $l = \sqrt{a+l}$ , 即  $l = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1+4a})$  ( $l = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1+4a})$ , 与题意不符, 舍去), 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1+4a})$ .

**例 1.15** 设  $x_0 > 0, x_n = \frac{2(1+x_{n-1})}{2+x_{n-1}} (n=1, 2, \dots)$ . 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在, 并求之.

**证明** 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在. 注意到对于一切的  $n$  恒有

$$x_n = 1 + \frac{x_{n-1}}{2+x_{n-1}} > 1, \quad x_n = 2 - \frac{2}{2+x_{n-1}} < 2,$$

因此知数列  $\{x_n\}$  有界. 又

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \left(2 - \frac{2}{2+x_n}\right) - \left(2 - \frac{2}{2+x_{n-1}}\right) \\ &= 2\left(\frac{1}{2+x_{n-1}} - \frac{1}{2+x_n}\right) = \frac{2(x_n - x_{n-1})}{(2+x_{n-1})(2+x_n)}, \end{aligned}$$

故得

$$x_n - x_{n-1} = \frac{2(x_{n-1} - x_{n-2})}{(2+x_{n-2})(2+x_{n-1})}, \dots, x_2 - x_1 = \frac{2(x_1 - x_0)}{(2+x_0)(2+x_1)}.$$

于是可知  $x_{n+1} - x_n$  与  $x_1 - x_0$  同号, 故当  $x_1 > x_0$  时, 数列  $\{x_n\}$  单调递增; 当  $x_1 < x_0$  时, 数列  $\{x_n\}$  单调递减. 也就是说, 数列  $\{x_n\}$  为单调有界数列, 故此单调有界数列必有极限.

求  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , 则

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(1+x_{n-1})}{2+x_{n-1}} = \frac{2(1+a)}{2+a},$$

解之得  $a = \sqrt{2}$ , 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{2}$ .

**例 1.16** 数列  $\{x_n\}$  满足  $x_1 > 0, x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1 (n=1, 2, \dots)$ , 证明  $\{x_n\}$  收敛, 并求  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . (2018 数二)



证明 (1) 有界性. 由  $x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1$  得  $e^{x_{n+1}} = \frac{e^{x_n} - 1}{x_n}$ , 即  $x_{n+1} = \ln \frac{e^{x_n} - 1}{x_n}$ , 从而  $x_2 = \ln \frac{e^{x_1} - 1}{x_1}$ .

设  $f(x) = e^x - 1 - x$ , 则  $f'(x) = e^x - 1 > 0 (x > 0)$  且  $f(0) = 0$ , 所以  $f(x)$  单调递增, 当  $x > 0$  时,  $f(x) > f(0) = 0$ , 即  $e^x - 1 > x (x > 0)$ , 于是  $\frac{e^x - 1}{x} > 1$ , 故  $\frac{e^{x_1} - 1}{x_1} > 1$ , 即  $x_2 = \ln \frac{e^{x_1} - 1}{x_1} > 0$ , 从而  $\forall n \in \mathbb{N}, x_n > 0$ .

单调性.  $x_{n+1} - x_n = \ln \frac{e^{x_n} - 1}{x_n} - x_n = \ln \frac{e^{x_n} - 1}{x_n e^{x_n}} = \ln \frac{e^{x_n} - 1}{x_n e^{x_n}}$ .

令  $g(x) = e^x - 1 - x e^x$ , 则  $g'(x) = -x e^x < 0 (x > 0)$ , 所以  $g(x)$  在  $[0, +\infty)$  上单调递减, 当  $x > 0$  时,  $g(x) < g(0) = 0$ , 从而有  $e^x - 1 < x e^x$ , 即  $\frac{e^x - 1}{x e^x} < 1$ , 于是

$$x_{n+1} - x_n = \ln \frac{e^{x_n} - 1}{x_n} - x_n = \ln \frac{e^{x_n} - 1}{x_n e^{x_n}} < 0,$$

故  $\{x_n\}$  单调递减. 于是  $\{x_n\}$  单调递减有下界, 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在.

(2) 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , 则  $a e^a = e^a - 1$ , 解得  $a = 0$ . 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ .

例 1.17 已知  $a > 0, x_1 > 0$ , 定义

$$x_{n+1} = \frac{1}{4} \left( 3x_n + \frac{a}{x_n^3} \right), \quad n = 1, 2, \dots$$

求证:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在, 并求其值.

解 第一步: 证明数列  $\{x_n\}$  的极限存在.

注意到, 当  $n \geq 2$  时,  $x_{n+1} = \frac{1}{4} \left( x_n + x_n + x_n + \frac{a}{x_n^3} \right) \geq \sqrt[4]{x_n x_n x_n \frac{a}{x_n^3}} = \sqrt[4]{a}$ , 因此数列  $\{x_n\}$  有下界. 又  $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{4} \left( 3 + \frac{a}{x_n^4} \right) \leq \frac{1}{4} \left( 3 + \frac{a}{a} \right) = 1$ , 即  $x_{n+1} \leq x_n$ , 所以  $\{x_n\}$  单调递减, 由极限存在准则知, 数列  $\{x_n\}$  有极限.

第二步: 求数列  $\{x_n\}$  的极限.

设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ , 则有  $A \geq \sqrt[4]{a} > 0$ . 由  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 3x_n + \frac{a}{x_n^3} \right)$ , 有  $A = \frac{1}{4} \left( 3A + \frac{a}{A^3} \right)$ , 解得  $A = \sqrt[4]{a}$  (舍掉负根), 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt[4]{a}$ .

### 题型 1-9 无限项之和的极限

无限项之和的项数自然随着项数变化而变化, 因此不能用和的极限运算法则. 求这类极限的关键是使和的项数不随项数的变化而变化, 将和化为有限且易求其极限的形式.

【解题思路一】先求和, 再求极限.

求和时, 常用下述求和公式:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$



等差数列的前  $n$  项和  $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$ ,

等比数列的前  $n$  项和  $S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$ .

**例 1.18** 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} \right)$ .

**解** 本题考虑无穷多个无穷小之和, 先求和再求极限.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2}.$$

**例 1.19**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \cdots + \frac{1}{1+2+3+\cdots+n} \right)$ .

**解**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \cdots + \frac{1}{1+2+3+\cdots+n} \right)$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{2} + \frac{1}{\frac{2(1+2)}{2}} + \frac{1}{\frac{3(1+3)}{2}} + \cdots + \frac{1}{\frac{n(1+n)}{2}} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{2} + \frac{2}{2 \times 3} + \frac{2}{3 \times 4} + \cdots + \frac{2}{n(1+n)} \right)$$

$$= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{n(1+n)} \right)$$

$$= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{1+n} \right)$$

$$= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{1+n} \right) = 2.$$

**【解题思路二】 裂项相消法(部分分式法)**

分解和式中的各项, 使前后两项相消, 将  $n$  项的和式简化成只含两项的和式.

常用的裂项方法, 有

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}, \quad \frac{1}{n(n+k)} = \frac{1}{k} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} \right),$$

$$\frac{1}{(ak)^2 - 1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{ak-1} - \frac{1}{ak+1} \right), \quad \frac{n}{(n+1)!} = \frac{n+1-1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!},$$

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right].$$

**例 1.20** 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \cdots + \frac{n}{n(n+1)(n+2)} \right)$ .

**解** 将和式中各项分解成两项之差.

$$\frac{1}{1 \times 2 \times 3} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{2 \times 3} \right), \quad \frac{1}{2 \times 3 \times 4} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2 \times 3} - \frac{1}{3 \times 4} \right),$$

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right].$$

将上式各项相加得

$$\frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \cdots + \frac{n}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right),$$



原极限  $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) = \frac{1}{4}$ .

**例 1.21** 设  $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

**解**  $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \right)$   
 $= \left( 1 - \frac{1}{2!} \right) + \left( \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \right) + \cdots + \left( \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \right) = 1 - \frac{1}{(n+1)!},$   
 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{(n+1)!} \right) = 1.$

**例 1.22**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right).$

**解**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right)$   
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right)$   
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)} - \frac{1}{(2n+1)} \right)$   
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left( \frac{2n}{2n+1} \right) = \frac{1}{2}.$

**【解题思路三】 夹逼准则** 若存在正整数  $N$ , 当  $n > N$  时有  $y_n \leq x_n \leq z_n$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .

$n$  项按递增或递减排列的数列, 一般利用夹逼准则求极限.

使用这个准则的关键在于: 根据  $\{x_n\}$  通项表达式的特点, 利用常用的放缩技巧, 找出符合定理条件的数列  $\{y_n\}$  和  $\{z_n\}$ , 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n, \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$  存在且相等.

常用的放缩技巧如下:

- (1) 若干个整数乘积中, 大于 1 的因子略去则缩小, 小于 1 的因子略去则放大;
- (2) 分子分母同为整数, 分母缩小, 此数则放大, 分母放大, 此数则缩小;
- (3)  $n$  个正数之和可放大为 (不超过) 最大数乘  $n$ , 可缩小为 (不小于) 最小数乘  $n$  或最大数.

**例 1.23** 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2+n+1} + \frac{2}{n^2+n+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n+n} \right).$

**解** 设  $x_n = \frac{1}{n^2+n+1} + \frac{2}{n^2+n+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n+n}$ , 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  是无限多项和的极限, 不能应用极限的四则运算法则求之. 这是因为极限的四则运算法则仅对有限项成立, 即在取极限的过程中, 项数要始终保持不变.

以和式中最小 (分母最大) 的一项的分母取代和式中的各项的分母, 得到

$$y_n = \frac{1}{n^2+n+n} + \frac{2}{n^2+n+n} + \cdots + \frac{n}{n^2+n+n} = \frac{n(n+1)}{2(n^2+n+n)}.$$

以和式中最大 (分母最小) 的一项的分母取代和式中的各项的分母, 得到

$$z_n = \frac{1}{n^2+n+1} + \frac{2}{n^2+n+1} + \cdots + \frac{n}{n^2+n+1} = \frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)},$$



$$y_n \leq \frac{1}{n^2+n+1} + \frac{2}{n^2+n+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n+n} \leq z_n.$$

而  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \frac{1}{2}$ , 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2+n+1} + \frac{2}{n^2+n+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n+n} \right) = \frac{1}{2}$ .

**例 1.24** 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (1 + \sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3} + \cdots + \sqrt[n]{n})$ .

**解**  $\frac{1}{n} (1 + 1 + 1 + \cdots + 1) \leq \frac{1}{n} (1 + \sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3} + \cdots + \sqrt[n]{n}) \leq \frac{1}{n} (\sqrt[n]{n} + \sqrt[n]{n} + \sqrt[n]{n} + \cdots + \sqrt[n]{n}),$

$$\frac{n}{n} \leq \frac{1}{n} (1 + \sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3} + \cdots + \sqrt[n]{n}) \leq \frac{n}{n} \sqrt[n]{n}, \text{ 即 } 1 \leq \frac{1}{n} (1 + \sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3} + \cdots + \sqrt[n]{n}) \leq \sqrt[n]{n}.$$

而  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ , 根据夹逼准则得  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (1 + \sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3} + \cdots + \sqrt[n]{n}) = 1$ .

**题型 1-10**  $n$  项乘积, 当  $n \rightarrow \infty$  时的极限

**【解题思路一】** 分子分母同时乘以一个因子, 使之出现连锁反应.

**例 1.25** (1) 当  $|x| < 1$  时, 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1+x)(1+x^2)(1+x^4) \cdots (1+x^{2^n})$ .

$$\begin{aligned} \text{解 原极限} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4) \cdots (1+x^{2^n})}{1-x} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-x^2)(1+x^2)(1+x^4) \cdots (1+x^{2^n})}{1-x} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-x^{2^n})(1+x^{2^n})}{1-x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x} = \frac{1}{1-x}. \end{aligned}$$

(2) 当  $x \neq 0$  时, 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n}$ .

$$\begin{aligned} \text{解 原极限} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \sin \frac{x}{2^n} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n}}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n-1} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \left( 2 \sin \frac{x}{2^n} \cos \frac{x}{2^n} \right)}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n-2} \sin \frac{x}{2^n} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \left( 2 \sin \frac{x}{2^{n-1}} \cos \frac{x}{2^{n-1}} \right)}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} \left( \sin \frac{x}{2^n} \sim \frac{x}{2^n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{2^n \frac{x}{2^n}} = \frac{\sin x}{x}. \end{aligned}$$

**【解题思路二】** 把通项拆开, 使各项相乘过程中中间项相消.

**例 1.26** 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{2^2} \right) \left( 1 - \frac{1}{3^2} \right) \cdots \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right)$ .

解  $1 - \frac{1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \frac{k-1}{k} \cdot \frac{k+1}{k}$ , 故

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{2}\right) \left(\frac{2}{3} \times \frac{4}{3}\right) \cdots \left(\frac{n-1}{n} \cdot \frac{n+1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

【解题思路三】 夹逼准则.

例 1.27 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n}$ .

解  $0 \leq \frac{n!}{n^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n}{n \cdot n \cdot \cdots \cdot n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdot \cdots \cdot \frac{n}{n} < \frac{1}{n} \cdot 1 \cdot \cdots \cdot 1 = \frac{1}{n}$ .

而  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ , 由夹逼准则有  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$ .

例 1.28 利用夹逼准则可以得到  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(a_1)^n + (a_2)^n + \cdots + (a_m)^n} = \max_{1 \leq i \leq m} a_i, (a_i > 0)$ .

利用上面的结论可求数列的极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + 2^n + 3^n} = \max\{1, 2, 3\} = 3$ .

### 3. 函数的极限

目前求极限的方法:

- (1) 利用极限的运算法则求极限;
- (2) 多项式与分式函数代入法;
- (3) 消去零因子法;
- (4) “抓大头”方法;
- (5) 利用重要极限;
- (6) 等价无穷小代换.

#### 题型 1-11 极限的运算性质

【解题思路】 注意极限的运算法则的前提条件是每个函数的极限都存在.

例 1.29 判断题

(1) 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  不存在,  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)]$  一定存在. ( )

(2) 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  与  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  都不存在, 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)]$  一定不存在. ( )

解 (1) 错. 假设  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)]$  存在, 由于  $g(x) = [f(x) \pm g(x)] - f(x)$ , 则由极限运算法则知,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  也存在, 与条件矛盾. 假设错误.

(2) 错. 如设  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ ,  $g(x) = -\sin \frac{1}{x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$  及  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\sin \frac{1}{x}\right)$  不存在, 但  $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + g(x)] = 0$ .

#### 题型 1-12 用极限的四则运算法则求极限

【解题思路】 所求极限都是初等函数的极限, 并且在所讨论的点处都连续, 所以可以直接用代入法计算.



例 1.30 求下列各式极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{x^2 + x \ln(\pi + x)}{\sin x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x)^x.$$

解 (1) 原式 =  $\left[ \left( \frac{\pi}{4} \right)^2 + \frac{\pi}{4} \ln \left( \pi + \frac{\pi}{4} \right) \right] / \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}\pi}{4} \left( \frac{\pi}{4} + \ln \frac{5\pi}{4} \right).$

(2) 原式 =  $(1+1)^0 = 1.$

### 题型 1-13 消去零公因子方法

【解题思路】 当分子分母都趋于 0 时, 对分子分母进行适当的恒等变形约去零公因子.

例 1.31 求下列函数的极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos^3 x}.$$

解 (1)  $\frac{0}{0}$  型不定式, 先消去分子分母中的零因子.

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1) = n.$$

(2)  $\frac{0}{0}$  型不定式, 不便化为重要极限公式, 应利用三角恒等变形消去零因子后再进行计算.

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \cos^2 x}{(1 + \cos x)(1 - \cos x + \cos^2 x)} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \cos x}{1 - \cos x + \cos^2 x} = \frac{1+1}{1+1+1} = \frac{2}{3}.$$

### 题型 1-14 “抓大头”方法

【解题思路】 利用前面“抓大头”的结论, 也可以推广到其他函数, 只要抓住分子的大头和分母的大头, 再求极限即可.

例 1.32 求下列各式极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x + 2}{7x^3 + x^2 + 3x + 1};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 3x^2 + 5}{7x^3 + 4x^2 - 1};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8x^3 + 6x^2 + 5x + 1}}{3x - 2};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x - 1} + x + 1}{\sqrt{x^2 + \sin x}}.$$

解 (1) 抓大头分子的大头  $3x^2$ , 分母的大头  $7x^3$ . 原式 =  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{7x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{7x} = 0.$

(2) 抓大头, 分子的大头  $2x^3$ , 分母的大头  $7x^3$ .  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 3x^2 + 5}{7x^3 + 4x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3}{7x^3} = \frac{2}{7}.$

(3) 抓大头, 分子的大头  $\sqrt[3]{8x^3}$ , 分母的大头  $3x$ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8x^3 + 6x^2 + 5x + 1}}{3x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8x^3}}{3x} = \frac{2}{3}.$$

(4) 抓大头  $\sqrt{4x^2 + x - 1} + x + 1$  的大头为  $\sqrt{4x^2} + x$ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x - 1} + x + 1}{\sqrt{x^2 + \sin x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + x}{x} = 3.$$

注 设  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ , 且  $Q(x_0) \neq 0$ , 则有  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} P(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} = f(x_0).$

当  $Q(x_0) = 0$  时, 则商的法则不能应用.

### 题型 1-15 用重要的极限及等价无穷小代换计算极限

【解题思路】 一般涉及三角函数的  $\frac{0}{0}$  型极限, 要用第一个重要极限  $\lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{\sin f(x)}{f(x)} = 1$ ;

$1^\infty$  型极限要用第二个重要极限  $\lim_{f(x) \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e$ .

(1) 注意两个重要极限的变形:

① 只要  $\lim f(x) = 0, f(x) \neq 0$ , 也有  $\lim \frac{\sin f(x)}{f(x)} = 1$ ;

② 只要  $\lim f(x) = \infty$ , 也有  $\lim \left(1 + \frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e$ .

(2) 利用两个重要极限求极限是求极限的重要方法之一, 要求熟练掌握.

(3) 对于求  $u(x)^{v(x)}$  的极限, 首先要恒等变形  $u(x)^{v(x)} = e^{v(x) \ln u(x)}$ .

更进一步 若  $\lim u(x) = 1, \lim v(x) = \infty$ , 则  $\lim u(x)^{v(x)} = e^{\lim v(x)[u(x)-1]}$ .

例 1.33  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi}$ .

解  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(\pi - x)}{x - \pi} = -1$ .

例 1.34  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan 2x}{\cot\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$ .

解 原式  $= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left[ \frac{\sin 2x}{\cos 2x} \cdot \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} \right] = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left[ \frac{\sin 2x}{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} \cdot \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)} \right]$   
 $= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left[ \frac{\sin 2x}{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} \cdot \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} \cdot \frac{-2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} \right] = -\frac{1}{2}$ .

例 1.35  $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e}$ .

解 解法一 洛必达法则.

解法二 变量代换再利用重要极限. 令  $x - e = t$ , 则  $x = t + e$ , 于是

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(e + t) - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{t}{e}\right) - 1}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{t}{e}\right)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t}{e}}{t} = \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

例 1.36  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ .

解 解法一  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \{ [1 + (\cos x - 1)]^{\frac{1}{\cos x - 1}} \}^{\frac{\cos x - 1}{x^2}} \left( 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2} \right)$



$$= \lim_{x \rightarrow 0} \{ [1 + (\cos x - 1)]^{\frac{1}{\cos x - 1}} \}^{\frac{x^2}{2}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

解法二  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}}.$

例 1.37 求  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$ .

解  $x \rightarrow -\infty, 2^x \rightarrow 0, 3^x \rightarrow 0$  且  $\ln(1+2^x) \sim 2^x, \ln(1+3^x) \sim 3^x$ , 所以

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x}{2^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^x = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln 3^x (1+3^{-x})}{\ln 2^x (1+2^{-x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln 3 + \ln(1+3^{-x})}{x \ln 2 + \ln(1+2^{-x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln 3 + \frac{1}{x} \ln(1+3^{-x})}{\ln 2 + \frac{1}{x} \ln(1+2^{-x})} = \frac{\ln 3}{\ln 2}.$$

故  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$  不存在.

例 1.38 求  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2}$ .

解  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} e^{x^2 \ln(1+\frac{1}{x})} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x^2 \ln(1+\frac{1}{x}) - x}$

$$\stackrel{t=\frac{1}{x}}{=} e^{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t) - t}{t^2}} = e^{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}t^2}{t^2}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

#### 题型 1-16 确定极限中的常数

【解题思路】 对于确定极限中的参数的问题,一般方法是:找出某些待定常数所满足的条件,列出方程,解之即可求出待定常数,这是求极限中待求常数的总的思路.常用的具体方法有几种:

求法一 根据下述极限的结果求之

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^m}{b_0 x^n} = \begin{cases} \infty, & m > n, \\ \frac{a_0}{b_0}, & m = n, \\ 0, & m < n. \end{cases}$$

例 1.39 已知  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1+x^2}{1+x} - ax + b \right) = 0$ , 求常数  $a$  和  $b$ .

解 原式  $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x^2-ax-ax^2+b+bx}{1+x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1-a)x^2+(b-a)x+b+1}{1+x} = 0.$

则分子的次数小于分母的次数,分子二次项和一次项的系数均为 0,所以  $1-a=0, b-a=0$ , 即  $b=a=1$ .

例 1.40 已知  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{n^\beta - (n-1)^\beta} = \frac{1}{2017}$ , 求  $\alpha, \beta$ .

解 解法一  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{n^\beta - (n-1)^\beta} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{n^\beta - (n^\beta - C_\beta^1 n^{\beta-1} + \cdots + (-1)^\beta)}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{\beta n^{\beta-1} - \frac{\beta(\beta-1)}{2} n^{\beta-2} + \cdots + (-1)^\beta} \quad (\alpha = \beta - 1)$$

$$= \frac{1}{\beta} = \frac{1}{2017},$$

则有  $\beta = 2017, \alpha = \beta - 1 = 2016$ .

解法二  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{n^\beta - (n-1)^\beta} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{n^\beta - n^\beta \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\beta}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{n^\beta \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\beta\right]} \quad \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\beta \sim 1 - \beta \left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{n^\beta \cdot \beta \frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{\beta n^{\beta-1}} = \frac{1}{2017},$$

则  $\alpha = \beta - 1, \beta = 2017$ , 故  $\alpha = \beta - 1 = 2016$ .

求法二 利用下述结果:

(1)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A, A \neq 0$  且  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ , 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ .

(2)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$ , 且  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ , 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ .

例 1.41 若  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - 1} = 3$ , 求  $a, b$  的值.

解 当  $x \rightarrow 1$  时,  $x^2 - 1 \rightarrow 0$ , 且  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - 1} = 3$ , 所以有

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + ax + b) = 0, \quad \text{即} \quad 1 + a + b = 0, b = -(1 + a).$$

所以  $\frac{x^2 + ax + b}{x^2 - 1} = \frac{x^2 + ax - (a + 1)}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{(x - 1)(x + a + 1)}{(x - 1)(x + 1)}$ , 故

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + a + 1)}{(x - 1)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + a + 1}{x + 1} = \frac{a + 2}{2} = 3.$$

故得  $a = 4, b = -5$ .

例 1.42 设  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{ax^2 - x - 3}{x + 1} = b (b \neq 0)$ , 求常数  $a$  与  $b$  的值.

解 因为  $\lim_{x \rightarrow -1} (x + 1) = 0$  且  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{ax^2 - x - 3}{x + 1}$  存在, 所以必有  $\lim_{x \rightarrow -1} (ax^2 - x - 3) = a + 1 - 3 = a - 2 = 0$ , 解得  $a = 2$ . 而

$$b = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - x - 3}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(2x - 3)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} (2x - 3) = -5.$$

故得  $a = 2, b = -5$ .

例 1.43 已知极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^k} = c$ , 其中  $k, c$  为常数, 且  $c \neq 0$ , 求  $k, c$ .

解 因为  $x - \arctan x \sim \frac{1}{3}x^3$ , 由  $c \neq 0$ , 知  $x - \arctan x$  与  $x^k$  是同阶无穷小, 所以  $k = 3$ .



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^3}{x^3} = \frac{1}{3}, \quad \text{故 } c = \frac{1}{3}.$$

**例 1.44** 若  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - a} (\cos x - b) = 5$ , 求  $a, b$ .

**【分析】** 本题属于已知极限求参数的反问题.

**解** 因为  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - a} (\cos x - b) = 5$ , 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot (\cos x - b) = 0$ , 所以  $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - a) = 0$ , 故得  $a = 1$ . 这时极限化为  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - 1} (\cos x - b) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} (\cos x - b) = 1 - b = 5$ , 得  $b = -4$ . 因此,  $a = 1, b = -4$ .

**例 1.45** 已知  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(ax+b)e^{\frac{1}{x}} - x] = 2$ , 求  $a, b$ . (2018 年数学三)

**解** 令  $t = \frac{1}{x}$ , 则

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [(ax+b)e^{\frac{1}{x}} - x] &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[ \frac{(a+bt)e^t}{t} - \frac{1}{t} \right] = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(a+bt)e^t - 1}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{\ln(a+bt)+t} - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(a+bt) + t}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(a+bt)}{t} + 1 = 2, \end{aligned}$$

$$\text{故 } \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(a+bt)}{t} = 1.$$

因为分母趋于零, 所以分子也应该趋于零, 即  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \ln(a+bt) - \ln a = 0$ , 则  $a = 1$ .

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(a+bt)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+bt)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{bt}{t} = b = 1.$$

综合得  $a = 1, b = 1$ .

### 题型 1-17 由已知极限求另一个与之相关的极限

**【解题思路】** 常用的方法:

(1) 利用存在极限的函数与无穷小量的关系:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + g(x), \text{ 其中 } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$$

得到未知函数  $f(x)$  的一个表达式, 将其代入所求极限中即可求出所求极限.

(2) 找出所求极限与已知极限的关系, 为此在已知极限中凑出所求极限.

(3) 利用结论: 若  $\lim f(x)g(x) = A$  (常数), 若  $\lim f(x) = \infty$ , 则必有  $\lim g(x) = 0$ .

**例 1.46** 已知  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ 1 + x + \frac{f(x)}{x} \right]^{\frac{1}{x}} = e^3$ , 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}$ .

**【分析】** 求已知极限, 在求的过程中配出  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}$ , 然后再比较.

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 0} \left[ 1 + x + \frac{f(x)}{x} \right]^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} (x + \frac{f(x)}{x})} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \frac{f(x)}{x^2})} = e^3, \text{ 则 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 2.$$

**例 1.47** 若  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x + x f(x)}{x^3} = 0$ , 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^2}$ .

解  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x + x f(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^2} + \frac{\sin 6x - 6x}{x^3}$  (在已知极限中凑出所求极限)

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6}(6x)^3}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^2} - 36 = 0,$$

则  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^2} = 36$ .

例 1.48 已知  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x f(x) + \ln(1-2x)}{x^2} = 4$ , 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2}{x}$ .

$$\begin{aligned} \text{解 } & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x f(x) - 2x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{x f(x) + \ln(1-2x)}{x^2} - \frac{2x + \ln(1-2x)}{x^2} \right] \quad (\text{用已知极限表示未知极限}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x f(x) + \ln(1-2x)}{x^2} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-2x) - (-2x)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x f(x) + \ln(1-2x)}{x^2} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}(-2x)^2}{x^2} = 4 - (-2) = 6. \end{aligned}$$

例 1.49 设函数  $f(x)$  在  $x=1$  的某邻域内连续, 且有  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln[f(x+1) + 1 + 3\sin^2 x]}{\sqrt{1-x^2} - 1} = -4$ , 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+1)}{x^2}$ .

解 因为分母  $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1-x^2} - 1) = 0$ , 而  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln[f(x+1) + 1 + 3\sin^2 x]}{\sqrt{1-x^2} - 1} = -4$ , 所以分子  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln[f(x+1) + 1 + 3\sin^2 x] = 0$ , 从而有  $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x+1) + 3\sin^2 x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x+1) = 0$ , 由已知极限凑出所求极限

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln[f(x+1) + 1 + 3\sin^2 x]}{\sqrt{1-x^2} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+1) + 3\sin^2 x}{-\frac{1}{2}x^2} = -2 \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{f(x+1)}{x^2} + 3 \frac{\sin^2 x}{x^2} \right) \\ &= -2 \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+1)}{x^2} + 3 \right) = -4, \end{aligned}$$

即  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+1)}{x^2} + 3 = 2$ , 故  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+1)}{x^2} = -1$ .

#### 4. 无穷小的比较

##### 题型 1-18 无穷小与无穷大的判断

【解题思路】 无穷小极限为零, 无穷大极限为无穷大。

##### 例 1.50 判断题

(1) 变量  $x_n$  按下面数列取值:  $1, 0, 2, 0, 3, 0, \dots, n, 0, \dots$ . 变量  $x_n$  是无穷大. ( )

(2) 设  $f(x)$  是自变量  $x$  的某个变化过程中的无穷小,  $g(x)$  为该过程中的无穷大, 则在该过程中  $f(x)g(x)$  以 1 为极限. ( )



解 (1) 错. 因为不论  $n$  取得有多大,  $x_n$  后总有为 0 的项, 对任何正数  $M, 0 > M$  不能成立, 但变量  $x_n$  是无界的. 这表明无界的数列不一定是无穷大.

(2) 错. 如当  $n \rightarrow \infty$  时,  $\frac{1}{n}$  是无穷小,  $n^2$  是无穷大, 但  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot n^2 = \infty$ , 即它们的积是无穷大.

例 1.51 证明: 当  $x \rightarrow \infty$  时,  $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$  是无穷小.

$$\begin{aligned} \text{证明 } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1})}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1 - (x^2-1)}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}} = 0. \end{aligned}$$

所以  $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$  是无穷小.

### 题型 1-19 无穷小的比较

#### 【解题思路】

(1) 利用无穷小的比较的定义, 求极限.

(2)  $x \rightarrow 0$  时,  $x^n + x^m \sim x^{\min(m,n)}$ ,  $x^n x^m \sim x^{m+n}$ ,  $x o(x^n) = o(x^{n+1})$ .

(3) 当  $\varphi(x) \rightarrow 0$  时,  $\varphi(x) + o(\varphi(x)) \sim \varphi(x)$ .

(4) 利用: 若  $x \rightarrow 0$  时,  $f(x) \sim ax^m$ ,  $g(x) \sim bx^n$   $m > 0, n > 0$ .

若  $m < n$ , 则  $ax^m$  是  $bx^n$  的低阶无穷小, 从而  $f(x)$  是  $g(x)$  的低阶无穷小;

若  $m = n$ , 则  $bx^n$  是  $ax^m$  的同阶无穷小, 从而  $g(x)$  是  $f(x)$  的同阶无穷小;

若  $m > n$ , 则  $ax^m$  是  $bx^n$  的高阶无穷小, 从而  $f(x)$  是  $g(x)$  的高阶无穷小.

(5)  $\alpha \sim \beta$ , 则  $\alpha = \beta + o(\beta)$ .

例 1.52 当  $x \rightarrow 0$  时, 用  $o(x)$  表示比  $x$  高阶的无穷小, 则下列式子中错误的是( ).

A.  $x \cdot o(x^2) = o(x^3)$

B.  $o(x)o(x^2) = o(x^3)$

C.  $o(x^2) + o(x^2) = o(x^2)$

D.  $o(x) + o(x^2) = o(x^2)$

解 由高阶无穷小的定义可知 A, B, C 都是正确的, 对于 D 可找出反例, 例如当  $x \rightarrow 0$  时,  $f(x) = x^2 + x^3 = o(x)$ ,  $g(x) = x^3 = o(x^2)$ , 但  $f(x) + g(x) = o(x)$  而不是  $o(x^2)$ , 故应该选 D.

#### 例 1.53 选择题

(1) 当  $x \rightarrow -1$  时,  $x^2 + 2x + 1$  与  $x^2 - 1$  比较是( ).

A. 等价无穷小 B. 同阶无穷小 C. 低阶无穷小 D. 高阶无穷小

(2) 当  $x \rightarrow 0$  时, 与  $x \sin 5x$  是同阶的无穷小是( ).

A.  $x$  B.  $3x^2$  C.  $x^3$  D.  $x^4$

解 (1)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)^2}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x-1} = 0$ , 故选 D.

(2)  $x \sin 5x \sim 5x^2$ , 故选 B.

例 1.54 证明: 当  $x \rightarrow \infty$  时,  $(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1})$  与  $\frac{1}{x}$  是等价无穷小.

证明 因为

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}{1/x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1})}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}} = 1,\end{aligned}$$

所以  $(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1})$  与  $\frac{1}{x}$  是等价无穷小.

**例 1.55** 当  $x \rightarrow 0$  时, 判断下列各无穷小对无穷小  $x$  的阶:

(1)  $\sqrt{x} + \sin x$ ; (2)  $x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{2}}$ ; (3)  $\sqrt[3]{x} - 3x^3 + x^5$ .

**解** (1) 因为  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} + \sin x}{\sqrt{x}} = 1$ , 所以  $x \rightarrow 0$  时  $\sqrt{x} + \sin x$  是  $x$  的  $\frac{1}{2}$  阶无穷小.

或  $x \rightarrow 0$  时  $\sin x \sim x = o(\sqrt{x})$ , 所以  $\sqrt{x} + \sin x \sim \sqrt{x}$ , 即  $x \rightarrow 0$  时  $\sqrt{x} + \sin x$  是  $x$  的  $\frac{1}{2}$  阶无穷小, 是  $x$  的低阶无穷小.

(2) 因为  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} (x^{\frac{1}{6}} - 1) = -1$ , 所以  $x \rightarrow 0$  时  $x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{2}}$  是  $x$  的  $\frac{1}{2}$  阶无穷小.

(3) 因为  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} - 3x^3 + x^5}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 3x^{\frac{8}{3}} + x^{\frac{14}{3}}) = 1$ , 所以  $x \rightarrow 0$  时  $\sqrt[3]{x} - 3x^3 + x^5$  是  $x$  的  $\frac{1}{3}$  阶无穷小.

或  $x \rightarrow 0$  时,  $-3x^3 + x^5 = o(\sqrt[3]{x})$ , 所以  $\sqrt[3]{x} - 3x^3 + x^5 \sim \sqrt[3]{x}$ , 即  $x \rightarrow 0$  时  $\sqrt[3]{x} - 3x^3 + x^5$  是  $x$  的  $\frac{1}{3}$  阶无穷小.

**例 1.56** 已知函数  $f(x) = \frac{1+x}{\sin x} - \frac{1}{x}$ , 记  $a = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

(1) 求  $a$  的值;

(2) 若当  $x \rightarrow 0$  时,  $f(x) - a$  是  $x^k$  的同阶无穷小, 求  $k$ . (2012 年数学二)

**解** (1)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} + \frac{x}{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ , 即  $a = 1$ .

(2) 当  $x \rightarrow 0$  时, 由  $f(x) - a = f(x) - 1 = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sin x}{x \sin x}$ .

又因为, 当  $x \rightarrow 0$  时,  $x - \sin x$  与  $\frac{1}{6}x^3$  等价, 故  $f(x) - a \sim \frac{1}{6}x$ , 即  $k = 1$ .

**例 1.57** 当  $x \rightarrow 0^+$  时, 与  $\sqrt{x}$  等价的无穷小量是( ).

A.  $1 - e^{\sqrt{x}}$       B.  $\ln \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$       C.  $\sqrt{1+\sqrt{x}} - 1$       D.  $1 - \cos \sqrt{x}$

**解**  $1 - e^{\sqrt{x}} \sim -\sqrt{x}$ ;

$\ln(1+x) \sim x$ ,  $\ln(1-\sqrt{x}) \sim -\sqrt{x}$ , 故  $\ln \frac{1+x}{1-\sqrt{x}} = \ln(1+x) - \ln(1-\sqrt{x}) \sim x + \sqrt{x} \sim \sqrt{x}$ ;

$\sqrt{1+\sqrt{x}} - 1 \sim \frac{1}{2}\sqrt{x}$ ;       $1 - \cos \sqrt{x} \sim \frac{1}{2}x$ .



故选 B.

### 题型 1-20 利用等价无穷小代替求极限

**【解题思路一】** 当一个无穷小在算式中处于因子地位(与其他部分是相乘关系)时,才能够用它的某个等价无穷小来代替;若是两个无穷小做和或差,则要谨慎代换,是有条件的;而且这种代替只能是用简单的代替复杂的,不能用复杂的代替简单的,否则就失去了等价无穷小替代的意义了.

**例 1.58** 求下列极限:

$$\begin{aligned} (1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{2x}; & \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^n}{\sin^m x} (m, n \text{ 为正整数}); \\ (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sin^2 x}; & \quad (4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}. \end{aligned}$$

解 (1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}.$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^n}{\sin^m x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n}{x^m} = \begin{cases} 1, & n=m, \\ 0, & n>m, \\ \infty, & n<m. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sin^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x})(\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos x})}{x^2(\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2(\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos x})} = \frac{1}{4\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - \cos x}{\cos x}}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2 \cos x} = \frac{1}{2}.$$

或  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^3}{x^3} = \frac{1}{2}.$

**例 1.59** 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin^2 x + \cos x - 1)\tan 3x}{(e^{x^2} - 1)\sin x}.$

解  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin^2 x + \cos x - 1)\tan 3x}{(e^{x^2} - 1)\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(x^2 - \frac{1}{2}x^2\right) \cdot 3x}{x^2 \cdot x} = \frac{3}{2}.$

**例 1.60** 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n} \right)^{\frac{x}{n}}.$

**【分析】** 本题属于  $1^\infty$  型未定式,对于这类题

若  $\lim u(x) = 1, \lim v(x) = \infty$ , 则  $\lim u(x)^{v(x)} = e^{\lim v(x)[u(x)-1]}.$

解  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n} \right)^{\frac{x}{n}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{n} \left[ \frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n} - 1 \right]}$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e(e^x - 1) + (e^{2x} - 1) + \cdots + (e^{nx} - 1)}{n}} \quad (\text{等价无穷小代换})$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e \cdot x + 2x + \cdots + nx}{n}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e \cdot \frac{n(n+1)}{2} x}{n}} = e^{\frac{(n+1)e}{2}}.$$

例 1.61 求  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - (\sin x)^x}{\sqrt[3]{1 + \arctan x \cdot \tan x^2 \cdot (3 + \arcsin x)} - 1}$ .

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - (\sin x)^x}{\sqrt[3]{1 + \arctan x \cdot \tan x^2 \cdot (3 + \arcsin x)} - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x \ln x} - e^{x \ln \sin x}}{\frac{1}{3} \cdot \arctan x \cdot \tan x^2 \cdot (3 + \arcsin x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x \ln \sin x} \cdot (e^{x \ln x - x \ln \sin x} - 1)}{\frac{1}{3} \cdot x \cdot x^2 \cdot 3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x \ln \sin x} \cdot (x \ln x - x \ln \sin x)}{x^3} \quad \left( \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln \sin x = 0 \right) \\
 &= e^0 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln \frac{x}{\sin x}}{x^3} \quad \left( \ln \frac{x}{\sin x} = \ln \left( 1 + \frac{x}{\sin x} - 1 \right) \sim \frac{x}{\sin x} - 1 \right) \\
 &= e^0 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x}{\sin x} - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \sin x}{x^2 \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{6} x^3}{x^3} = \frac{1}{6}.
 \end{aligned}$$

## 5. 函数的连续与间断

### 题型 1-21 讨论函数的连续性

【解题思路】 当所给函数是抽象的记号而不是具体函数时, 往往用  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$  是否成立来讨论函数的连续性; 当所给函数有具体函数关系时, 往往用  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  是否成立来讨论函数的连续性.

讨论分段函数的连续性时, 要分两种情况来讨论:

一是在某段上, 按该段上初等函数式来讨论;

二是在相邻两段的分段点处, 则要用极限存在的充要条件来讨论, 看左右极限是否存在, 是否相等来确定连续还是间断.

例 1.62  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  是  $f(x)$  在  $x_0$  连续的( ).

A. 必要条件      B. 充分条件      C. 充要条件      D. 无关条件

解 选 A.

例 1.63 讨论下列函数的连续性:

(1) 设  $f(x) = \frac{1}{x} \ln(1-x)$ , 要使  $f(x)$  在  $x=0$  处连续,  $f(0)$  为多少?

(2) 设  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \arctan \frac{1}{x} + \frac{a + be^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{1}{x}}}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$   $a, b$  为何值时  $f(x)$  在  $x=0$  连续.

(3) 设  $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - e^{\sin x}}{\arctan \frac{x}{2}}, & x > 0, \\ ae^{2x} - 1, & x \leq 0 \end{cases}$  是  $(-\infty, +\infty)$  上的连续函数, 求  $a$ .



(4) 设  $f(x) = \begin{cases} \frac{ax+b}{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}}, & x \neq 1, \\ 4, & x=1 \end{cases}$  在定义域内连续, 求  $a, b$  的值.

解 (1)  $f(x)$  在  $x=0$  处没有定义,  $x=0$  是函数的间断点.

因为  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(1-x) = -1$ , 所以补充  $f(0) = -1$  能使  $f(x)$  在  $x=0$  连续.

(2) 遇到  $x \rightarrow 0, e^{\frac{1}{x}}$  的极限, 要讨论左、右极限  $x \rightarrow 0^-, e^{\frac{1}{x}} \rightarrow 0; x \rightarrow 0^+, e^{\frac{1}{x}} \rightarrow +\infty$ .

因为  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{1}{\pi} \arctan \frac{1}{x} + \frac{a+be^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}} \right) = \frac{1}{\pi} \cdot \left( -\frac{\pi}{2} \right) + a = -\frac{1}{2} + a$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{\pi} \arctan \frac{1}{x} + \frac{a+be^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}} \right) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} + b = \frac{1}{2} + b,$$

而  $f(x)$  在  $x=0$  连续, 且  $f(0)=1$ , 则要求  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ , 即

$$-\frac{1}{2} + a = \frac{1}{2} + b = 1, \text{ 解得 } a = \frac{3}{2}, b = \frac{1}{2}.$$

所以, 当  $a = \frac{3}{2}, b = \frac{1}{2}$  时, 能使函数在  $x=0$  连续.

(3)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (ae^{2x} - 1) = a - 1$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{\sin x}}{\arctan \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin x}{\frac{x}{2}} = -2,$$

而  $f(x)$  在  $x=0$  处连续, 且  $f(0) = a - 1$ , 故

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0), \text{ 即有 } a - 1 = -2, \text{ 则 } a = -1.$$

(4)  $f(x)$  在定义域内连续, 所以它在  $x=1$  处连续. 所以

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax+b}{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(ax+b)(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3})}{3x+1-x-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax+b}{x-1} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}}{2} = 2 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax+b}{x-1} = 4, \end{aligned}$$

所以  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax+b}{x-1} = 2$ , 故  $a=2, b=-2$ .

**例 1.64** 设函数  $f(x) = \begin{cases} x^\alpha \cos \frac{1}{x^\beta}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} (\alpha > 0, \beta > 0)$ , 当  $\alpha, \beta$  满足什么条件时,

$f'(x)$  在  $x=0$  处连续.

解 当  $x < 0$  时,  $f'(x) = 0, f'_-(0) = 0$ ;

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^\alpha \cos \frac{1}{x^\beta} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\alpha-1} \cos \frac{1}{x^\beta},$$

当  $x > 0$  时,  $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \cos \frac{1}{x^\beta} + (-1)x^\alpha \sin \frac{1}{x^\beta} (-\beta) \frac{1}{x^{\beta+1}}$

$$= \alpha x^{\alpha-1} \cos \frac{1}{x^\beta} + \beta x^{\alpha-\beta-1} \sin \frac{1}{x^\beta}.$$

若  $f'(x)$  在  $x=0$  处连续, 则  $f'_-(0) = f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\alpha-1} \cos \frac{1}{x^\beta} = 0$ , 从而得  $\alpha-1 > 0$ .

由  $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \alpha x^{\alpha-1} \cos \frac{1}{x^\beta} + \beta x^{\alpha-\beta-1} \sin \frac{1}{x^\beta} \right) = 0$ , 得  $\alpha-\beta-1 > 0$ .

### 题型 1-22 间断点及其类型的判断

**【解题思路】** 不连续就是间断, 找函数的间断点主要是找无定义的点 (例如使分式的分母为 0 的点), 无定义的点一定是间断点, 分段函数的分段点可能是间断点. 判断间断点的类型主要根据定义, 左、右极限都存在的点为第一类间断点, 左、右极限相等时为可去间断点; 不相等时为跳跃间断点. 除了第一类就是第二类间断点.

#### 例 1.65 判断题

(1) 分段函数必有间断点. ( )

(2) 若  $f(x)$  与  $g(x)$  都在  $x_0$  点间断, 则  $f(x)+g(x)$  也在  $x_0$  点间断. ( )

解 (1) 错. 例如分段函数  $f(x) = \begin{cases} 1-x, & x < 0, \\ 1+x, & x \geq 0, \end{cases}$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续.

(2) 错. 例如  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$  与  $g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ -1, & x = 0 \end{cases}$  都在  $x=0$  处不连续, 但

$f(x)+g(x)$  在  $x=0$  处连续.

#### 例 1.66 选择题

(1)  $x=0$  是  $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$  的 ( ).

A. 跳跃间断点    B. 无穷间断点    C. 可去间断点    D. 振荡间断点

(2) 设  $F(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & x \neq 0, \\ f(0), & x = 0, \end{cases}$  其中  $f(x)$  在  $x=0$  处可导,  $f'(0) \neq 0$ ,  $f(0) = 0$ , 则  $x=0$

是  $F(x)$  的 ( ).

A. 连续点    B. 第一类间断点  
C. 第二类间断点    D. 连续点或间断点不能由此确定

(1990 年数学二)

解 (1) 因为  $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$  在  $x=0$  处没有定义, 所以  $x=0$  为  $f(x)$  的间断点. 又因为  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ , 若补充  $f(0) = 0$ , 那么  $f(x)$  在  $x=0$  处就连续了, 因此  $x=0$  为  $f(x)$  的可去间断点, 为第一类间断点. 选 C.

(2) 因为  $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) \neq 0 = f(0) = F(0)$ , 即  $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) \neq F(0)$ ,  $x=0$  为  $F(x)$  的可去间断点, 为第一类间断点. 故选 B.

例 1.67 设  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内有定义, 且  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$ ,

$$g(x) = \begin{cases} f\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$



则( ).

- A.  $x=0$  必是  $g(x)$  的第一类间断点      B.  $x=0$  必是  $g(x)$  的第二类间断点  
C.  $x=0$  必是  $g(x)$  的连续点      D.  $g(x)$  在点  $x=0$  处的连续性与  $a$  的取值有关

**【分析】** 考查极限  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$  是否存在, 如存在, 是否等于  $g(0)$  即可, 通过换元  $u = \frac{1}{x}$ , 可将极限  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$  转化为  $\lim_{u \rightarrow \infty} f(u)$ .

**解** 因为  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{u \rightarrow \infty} f(u) = a$  (令  $u = \frac{1}{x}$ ). 又  $g(0) = 0$ , 所以, 当  $a = 0$  时,  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0)$ , 即  $g(x)$  在点  $x=0$  处连续, 当  $a \neq 0$  时,  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) \neq g(0)$ , 即  $x=0$  是  $g(x)$  的第一类间断点, 因此,  $g(x)$  在点  $x=0$  处的连续性与  $a$  的取值有关, 故选 D.

**例 1.68** 求函数  $f(x) = \frac{|x|^x - 1}{x(x+1)\ln|x|}$  的间断点并判断其类型.

**解** 函数在  $x=-1, x=0, x=1$  处没有定义, 因此间断点为  $x=-1, x=0, x=1$ .

当  $x \ln|x| \rightarrow 0$  时,  $|x|^x - 1 = e^{x \ln|x|} - 1 \sim x \ln|x|$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|^x - 1}{x(x+1)\ln|x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln|x|}{x \ln|x|} = 1$ , 所以  $x=0$  是函数  $f(x)$  的可去间断点.

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x|^x - 1}{x(x+1)\ln|x|} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln|x|}{2x \ln|x|} = \frac{1}{2}$ , 所以  $x=1$  是函数  $f(x)$  的可去间断点.

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x|^x - 1}{x(x+1)\ln|x|} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x \ln|x|}{-(x+1)\ln|x|} = \infty$ , 所以  $x=-1$  是函数  $f(x)$  的无穷间断点.

**例 1.69** 函数  $f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\sin t}{x}\right)^{\frac{x^2}{t}}$  在  $(-\infty, +\infty)$  内( ).

- A. 连续      B. 有可去间断点      C. 有跳跃间断点      D. 有无穷间断点

**解**  $f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\sin t}{x}\right)^{\frac{x^2}{t}} = e^{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \cdot x^2} = e^x, x \neq 0$ , 故  $f(x)$  有可去间断点  $x=0$ , 故选 B.

**例 1.70** 求函数  $f(x) = \frac{4}{1 - \frac{2}{x}}$  的间断点, 并判断其类型.

**解** 函数  $f(x) = \frac{4}{1 - \frac{2}{x}}$  在  $x=0, x=2$  处没有定义, 因此  $x=0, x=2$  都是函数的间断点.

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{1 - \frac{2}{x}} = 0$ ,  $x=0$  为函数  $f(x) = \frac{4}{1 - \frac{2}{x}}$  的可去间断点, 为第一类间断点.

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4}{1 - \frac{2}{x}} = \infty$ ,  $x=2$  为函数  $f(x) = \frac{4}{1 - \frac{2}{x}}$  的无穷间断点, 为第二类间断点.

**例 1.71**  $f(x) = \lim_{t \rightarrow x} \left(\frac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t - \sin x}}$ , 求  $f(x)$  的间断点并判断其类型.

解  $f(x) = \lim_{t \rightarrow x} \left( \frac{\sin t}{\sin x} \right)^{\frac{x}{\sin t \sin x}} = e^{\lim_{t \rightarrow x} \left( \frac{\sin t}{\sin x} - 1 \right) \frac{x}{\sin t \sin x}} = e^{\frac{x}{\sin x}}$ , 因此  $x=0, x=k\pi (k=\pm 1, \pm 2, \dots)$

都是  $f(x)$  的间断点.

因为  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x}} = e$ ,  $x=0$  为函数的可去间断点, 为第一类间断点.

$\lim_{x \rightarrow k\pi} f(x) = e^{\lim_{x \rightarrow k\pi} \frac{x}{\sin x}} = \infty$ , 因此  $x=k\pi (k=\pm 1, \pm 2, \dots)$  为函数的无穷间断点, 为第二类间断点.

例 1.72 求函数  $f(x) = \frac{(e^{\frac{1}{x}} + e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}} - e)}$  的间断点, 并判断类型.

解 函数没有定义的点为  $x=0, x=1, x=k\pi + \frac{\pi}{2}$ , 故函数的间断点为  $x=0, x=1, x=k\pi + \frac{\pi}{2}$ .

在  $x=0$  处,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(e^{\frac{1}{x}} + e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}} - e)} = 1 \quad \left( \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty \right)$ ,

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(e^{\frac{1}{x}} + e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}} - e)} = -1 \quad \left( \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0 \right)$ ,

所以  $x=0$  为  $f(x)$  的跳跃间断点, 属于第一类间断点.

在  $x=1$  处,  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(e^{\frac{1}{x}} + e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}} - e)} = \infty$ , 所以  $x=1$  为  $f(x)$  的无穷间断点, 属于第二类间断点.

在  $x=k\pi + \frac{\pi}{2}$  处,  $\lim_{x \rightarrow k\pi + \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow k\pi + \frac{\pi}{2}} \frac{(e^{\frac{1}{x}} + e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}} - e)} = \infty$ , 故  $x=k\pi + \frac{\pi}{2}$  为  $f(x)$  的无穷间断点, 属于第二类间断点.

例 1.73 求函数  $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$  的间断点, 并判断类型.

解  $x=0, x=1, x=-1$  为间断点.

当  $x=0$  时, 由于  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x+1} \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|} = 1$ , 而  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x+1} \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|} = -1$ , 所以  $x=0$  是跳跃间断点, 属于第一类间断点.

当  $x=1$  时, 由于  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x+1} \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 所以  $x=1$  是可去间断点, 属于第一类间断点.

当  $x=-1$  时, 因  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \infty$ , 所以  $x=-1$  是无穷间断点, 属于第二类间断点.

例 1.74 函数  $f(x) = \frac{e^x - b}{(x-a)(x-1)}$ , 其中  $x=0$  为  $f(x)$  的无穷间断点,  $x=1$  为  $f(x)$  的可去间断点, 求  $a, b$ .

解 因为  $x=0$  为  $f(x)$  的无穷间断点, 所以  $\lim_{x \rightarrow 0} (x-a)(x-1) = 0$ , 即  $(-a)(-1) = 0$ ,



得  $a=0$ , 且  $\lim_{x \rightarrow 0} e^x - b \neq 0$ , 即  $b \neq 1$ .

又  $x=1$  为  $f(x)$  的可去间断点, 则  $\lim_{x \rightarrow 1} e^x - b = 0$ , 得  $b=e$ .

**例 1.75** 设  $f(x) = \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$ , 判断  $x=1$  为  $f(x)$  的什么类型间断点.

**解**  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty, \lim_{x \rightarrow 1^-} 2^{\frac{1}{x-1}} = 0$ , 故  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}} = 1$ ,  
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty, \lim_{x \rightarrow 1^+} 2^{\frac{1}{x-1}} = +\infty$ , 故  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}} = 0$ .

$x=1$  处左右极限存在但不相等, 所以  $x=1$  为  $f(x)$  的跳跃间断点, 属于第一类间断点.

### 题型 1-23 利用闭区间上连续函数的性质证明命题

**例 1.76** 判断题

(1) 在  $[a, b]$  上不连续的函数一定没有最大值. ( )

(2) 在  $[a, b]$  上不连续的函数一定无界. ( )

**解** (1) 错. (2) 错. 例如:  $y = \sin \frac{1}{x}$  在  $[-1, 1]$  上不连续, 但它有最大值, 也有界.

**例 1.77** 证明下列各题:

(1) 证明  $x = e^{x-3} + 1$  至少有一个不超过 4 的正根.

(2) 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续且无零点, 证明:  $f(x)$  在  $[a, b]$  上恒正或恒负.

**证明** (1) 令  $f(x) = x - e^{x-3} - 1$ , 显然  $f(x)$  在闭区间  $[0, 4]$  上连续且

$$f(0) = -e^{-3} - 1 < 0, \quad f(4) = 4 - e^{4-3} - 1 = 3 - e > 0.$$

根据零点定理, 在开区间  $(0, 4)$  内至少存在一点  $\xi \in (0, 4)$ , 使  $f(\xi) = 0$ , 原命题得证.

(2) 用反证法. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上不是恒正或恒负, 则在  $[a, b]$  必有  $x_1, x_2$ , 且  $x_1 < x_2$ , 使得  $f(x_1)f(x_2) < 0$ . 又  $f(x)$  在  $[x_1, x_2] \subset [a, b]$  上连续, 所以根据零点定理至少存在一点  $\xi \in (x_1, x_2) \subset [a, b]$ , 使得  $f(\xi) = 0$ . 这与已知矛盾. 故得证.

### 题型 1-24 证明存在实根. 一般利用零点存在定理证明方程根的存在性

**【解题思路】** (1) 零点存在定理由 3 部分组成: ① 闭区间  $[a, b]$ ; ② 函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续; ③  $f(a)$  与  $f(b)$  异号. 证明根的存在性命题常常只给出上述 3 个条件中的部分条件, 另一些条件需要证明. 根据所给条件的不同, 利用零点定理证明根的存在性有下述三类命题:

① 需找出函数值异号的两点, 即找  $x_1, x_2 \in [a, b]$ , 使  $f(x_1)f(x_2) < 0$ . 常用下述各法找出这样的两点.

用观察法, 找两个特殊的点, 使函数值在这两点上异号; 根据函数极限为正无穷、负无穷分别求出函数值大于 0、小于 0 的两点; 由函数值的大小关系找出  $x_1, x_2 \in [a, b]$ , 使  $f(x_1)f(x_2) < 0$ .

② 需找出根存在的区间.

③ 需构造函数.

(2) 若函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 则它在  $[a, b]$  上取得介于最大值  $M$  与最小值  $m$  之间的任何值.

**例 1.78** 证明方程  $x^3 + 3x - 9$  至少有一个根介于 1 和 3 之间.

**证明** 所考虑区间应该是 $[1, 3]$ . 设  $f(x) = x^3 + 3x - 9$ , 则  $f(x)$  在  $[1, 3]$  上连续, 且  $f(1) = -5 < 0, f(3) = 27 > 0$ , 由零点定理, 在  $(1, 3)$  内至少有一点  $\xi$ , 使  $f(\xi) = 0$ , 即方程  $x^3 + 3x - 9$  在  $(1, 3)$  内至少有一根.

**例 1.79** 证明方程  $x + p + q\cos x = 0$  至少有一个根, 其中  $p, q$  为常数.

**证明** 设  $f(x) = x + p + q\cos x$ , 则

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + p + q\cos x) = -\infty, \text{ 故存在 } x_1, f(x_1) < 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + p + q\cos x) = +\infty, \text{ 故存在 } x_2 > x_1, f(x_2) > 0.$$

$f(x)$  在  $[x_1, x_2]$  上连续, 且  $f(x_1) < 0, f(x_2) > 0$ , 则  $f(x) = 0$  在  $(x_1, x_2) \subset (-\infty, +\infty)$  内至少有一根.

**6. 介值定理的应用:** 若函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 则它在  $[a, b]$  上取得介于最大值  $M$  与最小值  $m$  之间的任何值.

**题型 1-25** 证明存在  $\xi \in [a, b]$ , 使含  $\xi$  的等式成立

**【解题思路】** 利用介值定理证明: 先将含有  $\xi$  的待证等式分离成两部分使含  $\xi$  的函数和常数项分居在等式的两端, 为方便, 令其分别等于  $f(\xi)$  和  $k$ . 设法证明常数  $k$  在  $f(x)$  的相关区间上的最大值与最小值之间, 再利用介值定理即得存在  $\xi$  使得  $f(\xi) = k$ .

**例 1.80** 若  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且  $a < c < d < b$ , 证明在  $(a, b)$  内至少存在一点  $\xi$ , 使

$$pf(c) + qf(d) = (p+q)f(\xi),$$

其中  $p, q$  为任意正常数.

**证明** 先将预证结论改写成  $f(\xi) = \frac{pf(c) + qf(d)}{p+q}$ , 其右端为一常数. 令此常数  $k = \frac{pf(c) + qf(d)}{p+q}$ , 可归结为证明存在  $\xi \in (a, b)$ , 使  $f(\xi) = k$ , 于是利用介值定理证明之. 为此只需证明  $k$  介于  $f(x)$  的最大值与最小值之间.

因  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 设  $M, m$  分别为  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的最大值和最小值, 于是

$$m \leq f(c) \leq M, \quad m \leq f(d) \leq M, \text{ 故 } pm \leq pf(c) \leq pM, \quad qm \leq qf(d) \leq qM,$$

则

$$pm + qm \leq pf(c) + qf(d) \leq pM + qM,$$

$$m \leq k = \frac{pf(c) + qf(d)}{p+q} \leq M.$$

由介值定理知, 至少存在一点  $\xi \in (a, b)$ , 使  $f(\xi) = k$ , 即  $pf(c) + qf(d) = (p+q)f(\xi)$ .

## 1.4 课后习题解答

### 习题 1.1

1. 用区间表示下列不等式的解:

(1)  $x^2 \leq 9$ ; (2)  $|x-1| > 1$ ; (3)  $(x-1)(x+2) < 0$ .

**解** (1)  $\{x | -3 \leq x \leq 3\}; [-3, 3]$ .

(2)  $\{x | x > 2 \text{ 或 } x < 0\}; (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ .

(3)  $\{x | -2 < x < 1\}; (-2, 1)$ .

2. 判断下面函数是否相同, 并说明理由.

(1)  $y = 1$  与  $y = \sin^2 x + \cos^2 x$ ; (2)  $y = 2x + 1$  与  $x = 2y + 1$ .



解 (1) 虽然这两个函数的表现形式不同,但它们的定义域 $(-\infty, +\infty)$ 与对应法则均相同,所以这两个函数相同.

(2) 虽然它们的自变量与因变量所用的字母不同,但其定义域 $(-\infty, +\infty)$ 和对应法则均相同,所以这两个函数相同.

3. 求下列函数的定义域:

$$(1) y = \sin \sqrt{4-x^2}; \quad (2) y = \frac{1}{x^2-4x+3} + \sqrt{x+2};$$

$$(3) y = \arccos \ln \frac{x}{10}; \quad (4) y = \tan(x+1).$$

解 (1) 要使  $\sin \sqrt{4-x^2}$  有意义,必须  $4-x^2 \geq 0$ , 即  $|x| \leq 2$ . 所以定义域为  $[-2, 2]$ .

(2) 当  $x \neq 3$  且  $x \neq 1$  时,  $\frac{1}{x^2-4x+3}$  有意义,而要使  $\sqrt{x+2}$  有意义,必须  $x \geq -2$ , 故函数的定义域为:  $[-2, 1) \cup (1, 3) \cup (3, +\infty)$ .

(3) 要使  $\arccos \ln \frac{x}{10}$  有意义,则使  $-1 < \ln \frac{x}{10} < 1$ , 即  $\frac{1}{e} < \frac{x}{10} < e$ ,  $\frac{10}{e} < x < 10e$ , 即定义域为  $[\frac{10}{e}, 10e]$ .

(4) 要使  $\tan(x+1)$  有意义,则必有  $x+1 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , 即函数定义域为  $\{x | x \in \mathbb{R} \text{ 且 } x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} - 1, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ .

$$4. \text{ 设 } f(x) = \begin{cases} 2^x, & -1 < x < 0, \\ 2, & 0 \leq x < 1, \\ x-1, & 1 \leq x \leq 3, \end{cases} \text{ 求 } f(3), f(2), f(0), f\left(\frac{1}{2}\right), f\left(-\frac{1}{2}\right).$$

$$\text{解 } f(3)=2, \quad f(2)=1, \quad f(0)=2, \quad f\left(\frac{1}{2}\right)=2, \quad f\left(-\frac{1}{2}\right)=2^{-\frac{1}{2}}.$$

$$5. \text{ 设 } f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \geq 0, \\ x^2+4, & x < 0, \end{cases} \text{ 求 } f(x-1)+f(x+1).$$

$$\text{解 } f(x-1) = \begin{cases} 2x-1, & x \geq 1, \\ x^2-2x+5, & x < 1, \end{cases} \quad f(x+1) = \begin{cases} 2x+3, & x \geq -1, \\ x^2+2x+5, & x < -1, \end{cases}$$

故

$$f(x-1)+f(x+1) = \begin{cases} 2x^2+10, & x < -1, \\ x^2+8, & -1 \leq x < 1, \\ 4x+2, & x \geq 1. \end{cases}$$

6. 1998 年在上海乘大众出租车的第一个 5km (包括以内) 路程要付费 14.40 元, 续后的每 1km (包括 1km 以内) 需要付费 1.40 元, 试把付费金额  $C$  元表达成距离  $x$  km 的函数, 其中  $0 < x < 10$ .

$$\text{解 } C = \begin{cases} 14.4, & 0 < x \leq 5, \\ 14.4 + 1.4([\frac{x}{5} - 5] + 1), & 5 < x < 10, \end{cases} \text{ 其中 } [\frac{x}{5} - 5] \text{ 表示 } \frac{x}{5} - 5 \text{ 取整.}$$

7. 写出图 1-2(a) 和图 1-2(b) 所示函数的解析表达式

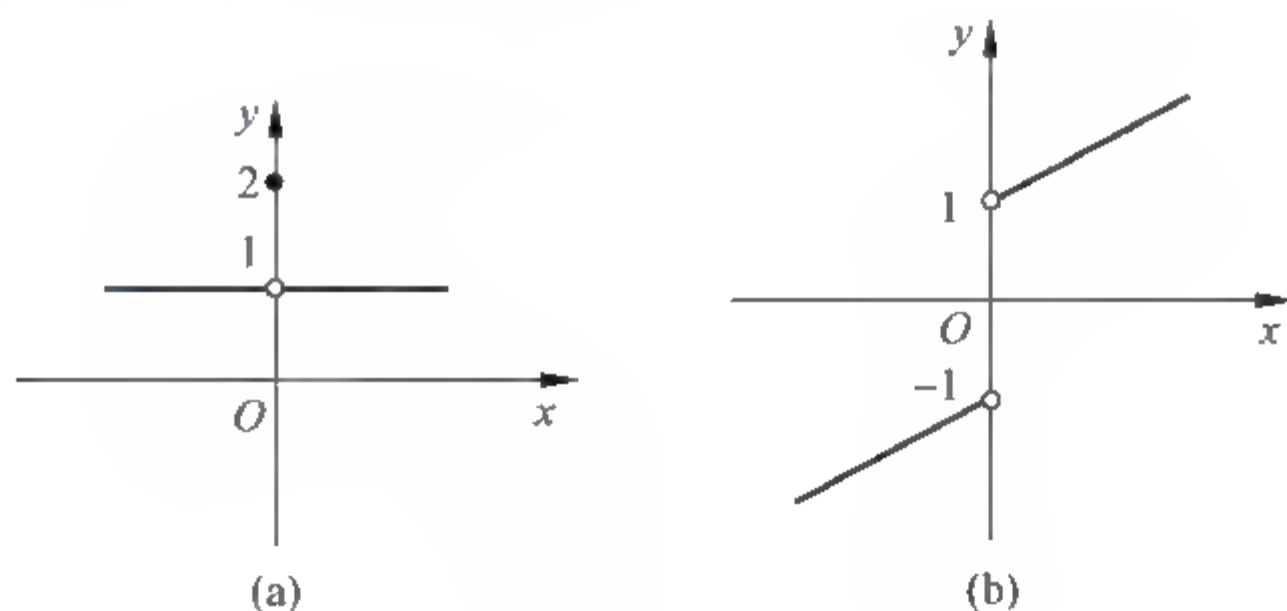


图 1-2

解 (a)  $y = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 2, & x = 0; \end{cases}$  (b)  $y = \begin{cases} ax+1, & x > 0, \\ bx-1, & x < 0, \end{cases}$  其中  $a > 0, b > 0$ .

8. 已知  $f(x)$  是二次多项式, 且  $f(x+1) - f(x) = 8x+3$ , 求  $f(x)$ .

解 设  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , 由  $f(x+1) - f(x) = 8x+3 = a(x+1)^2 + b(x+1) + c - (ax^2 + bx + c) = 2ax + a + b$ , 得  $2a = 8, a + b = 3$ , 解得  $a = 4, b = -1$ , 所以  $f(x) = 4x^2 - x + c$ .

9. 判定下列函数的奇偶性:

(1)  $f(x) = \frac{1-x^2}{\cos x}$ ;

(2)  $f(x) = (x^2 + x)\sin x$ ;

(3)  $f(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & x \leq 0, \\ e^x - 1, & x > 0; \end{cases}$

(4)  $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ .

分析: 先看定义域是否关于原点对称, 若对称再看  $f(-x)$  等于什么. 若定义域关于原点不对称, 则是非奇非偶函数.

解 本题的四个小题中函数的定义域都关于原点对称.

(1)  $f(-x) = f(x)$ , 偶函数.

(2) 非奇非偶函数.

(3) 奇函数.

$$\begin{aligned} (4) f(-x) &= \ln(-x + \sqrt{1+(-x)^2}) = \ln(-x + \sqrt{1+x^2}) = \ln \frac{(-x + \sqrt{1+x^2})(x + \sqrt{1+x^2})}{x + \sqrt{1+x^2}} \\ &= \ln \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} = -\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = -f(x). \end{aligned}$$

由定义知  $f(x)$  为奇函数.

10. 证明下列函数在指定区间内的单调性:

(1)  $y = x^2 \quad (-1, 0)$ ;

(2)  $y = \sin x \quad \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ;

(3)  $y = \frac{x}{1+x} \quad (-1, +\infty)$ .

证明 (1) 任取  $x_1, x_2 \in (-1, 0)$ , 且设  $x_1 < x_2$ , 由于  $x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) > 0$ , 所以  $y = x^2$  在  $(-1, 0)$  内单调减少.

(2) 任取  $x_1, x_2 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ , 设  $x_1 < x_2$ , 由于  $\sin x_1 - \sin x_2 = 2 \cos \frac{x_1 + x_2}{2} \sin \frac{x_1 - x_2}{2} < 0$ , 所以  $y = \sin x$  在  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  内单调增加.

(3) 在  $(-1, \infty)$  内任取两点  $x_1, x_2$ , 且  $x_1 < x_2$ , 则  $f(x_1) - f(x_2) = \frac{x_1}{1+x_1} - \frac{x_2}{1+x_2} = \frac{x_1 - x_2}{(1+x_1)(1+x_2)}$ .

因为  $x_1, x_2$  是  $(-1, \infty)$  内任意两点, 所以  $1+x_1 > 0, 1+x_2 > 0$ . 又因为  $x_1 - x_2 < 0$ , 故  $f(x_1) - f(x_2) < 0$ , 即  $f(x_1) < f(x_2)$ , 所以  $f(x) = \frac{x}{1+x}$  在  $(-1, +\infty)$  内是单调增加的.

### 提高题

1. 设  $f(x)$  是周期为 4 的奇函数, 且  $f(x) = x^2 - 2x, x \in [0, 2]$ , 求  $f(7)$ .

解  $f(7) = f(3) = f(-1) = -f(1) = -(1^2 - 2 \times 1) = 1$ .

2. 设下面所考虑的函数都是定义在对称区间  $(-L, L)$  内的, 证明:

(1) 两个偶函数的和是偶函数, 两个奇函数的和是奇函数.

(2) 两个偶函数的乘积是偶函数, 两个奇函数的乘积是偶函数, 偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

证明 (1) 设  $f(x), g(x)$  都是  $(-L, L)$  内的偶函数, 则  $f(-x) = f(x), g(-x) = g(x), f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x)$ , 所以  $f(x) + g(x)$  为偶函数. 同理可证奇函数情形.

(2) 设  $f(x)$  是  $(-L, L)$  内的偶函数,  $g(x)$  是  $(-L, L)$  内的奇函数, 则

$$f(-x) = f(x), \quad g(-x) = -g(x).$$

令  $h(x) = f(x)g(x)$ , 则  $h(-x) = f(-x)g(-x) = -f(x)g(x) = -h(x)$ , 所以  $h(x)$  是奇函数. 其余



两个类似证明.

3. 证明函数  $y = \frac{x}{x^2+1}$  在  $(-\infty, +\infty)$  上是有界的.

**证明** 因为  $(1-|x|)^2 \geq 0$ , 所以  $|1+x^2| \geq 2|x|$ , 故  $|f(x)| = \left| \frac{x}{x^2+1} \right| = \frac{2|x|}{2|1+x^2|} \leq \frac{1}{2}$ , 对一切  $x \in (-\infty, +\infty)$  都成立. 所以函数在  $(-\infty, +\infty)$  上是有界函数.

4. 证明函数  $y = \frac{1}{x^2}$  在  $(0, 1)$  上是无界的.

**证明** 对于无论怎样大的  $M > 0$ , 总可在  $(0, 1)$  内找到相应的  $x$ . 例如取  $x_0 = \frac{1}{\sqrt{M+1}} \in (0, 1)$  使得  $|f(x_0)| = \frac{1}{x_0^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{M+1}}\right)^2} = M+1 > M$ , 所以  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  在  $(0, 1)$  上是无界函数.

5. 判断函数  $f(x) = x \sin x$  在  $\mathbf{R}$  上是否有界? 说明理由.

**解** 无界. 如  $\left\{x \mid x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$ ,  $f(x) = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ . 当  $x$  无限增大时,  $f(x)$  无限增大, 此时  $f(x)$  无界.

6. 定义在  $\mathbf{R}$  上的函数  $y = f(x)$  满足  $f(0) \neq 0$ , 当  $x > 0$  时,  $f(x) > 1$ , 且对任意  $a, b \in \mathbf{R}$ ,  $f(a+b) = f(a)f(b)$ . (1) 求  $f(0)$ ; (2) 求证: 对任意  $x \in \mathbf{R}$ , 有  $f(x) > 0$ ; (3) 求证:  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上是增函数.

**解** (1)  $f(x) = 1$ .

(2) 当  $x > 0$  时,  $1 = f(0) = f(x)f(-x) > 0$ . 又由于  $x > 0$  时,  $f(x) > 1$  得知当  $x < 0$  时,  $0 < f(x) < 1$ . 综上, 对任意  $x \in \mathbf{R}$ , 有  $f(x) > 0$ .

(3) 对任意的  $x_1 < x_2$  有,  $x_1 - x_2 < 0$ ,  $\frac{f(x_1)}{f(x_2)} = \frac{f(x_1 - x_2 + x_2)}{f(x_2)} = f(x_1 - x_2) < 1$ , 故单调增函数.

## 习题 1.2

1. 下列初等函数是由哪些基本初等函数复合而成的?

(1)  $y = \sqrt[3]{\arcsin a^x}$ ; (2)  $y = \sin^3 \ln x$ ; (3)  $y = a^{\tan x^2}$ ; (4)  $y = \ln[\ln^2(\ln^3 x)]$ .

**解** (1) 令  $u = \arcsin a^x$ , 则  $y = \sqrt[3]{u}$ , 再令  $v = a^x$ , 则  $u = \arcsin v$ , 因此  $y = \sqrt[3]{\arcsin a^x}$  是由基本初等函数  $y = \sqrt[3]{u}$ ,  $u = \arcsin v$ ,  $v = a^x$  复合而成的.

(2) 令  $u = \sin \ln x$ , 则  $y = u^3$ , 再令  $v = \ln x$ , 则  $u = \sin v$ . 因此  $y = \sin^3 \ln x$  是由基本初等函数  $y = u^3$ ,  $u = \sin v$ ,  $v = \ln x$  复合而成.

(3) 令  $u = \tan x^2$ , 则  $y = a^u$ , 再令  $v = x^2$ , 则  $u = \tan v$ , 因此  $y = a^{\tan x^2}$  是由基本初等函数  $y = a^u$ ,  $u = \tan v$ ,  $v = x^2$  复合而成.

(4) 令  $u = \ln^2(\ln^3 x)$ , 则  $y = \ln u$ , 再令  $v = \ln(\ln^3 x)$ , 则  $u = v^2$ , 再令  $w = \ln^3 x$ , 则  $v = \ln w$ , 再令  $t = \ln x$ , 则  $w = t^3$ , 因此  $y = \ln[\ln^2(\ln^3 x)]$  是由基本初等函数  $y = \ln u$ ,  $u = v^2$ ,  $v = \ln w$ ,  $w = t^3$ ,  $t = \ln x$  复合而成.

2. 指出下列函数是怎样复合而成的:

(1)  $y = (1+x)^{20}$ ; (2)  $y = 2^{\sin^2 x}$ .

**解** (1)  $y = u^{20}$ ,  $u = 1+x$ ; (2)  $y = 2^u$ ,  $u = v^2$ ,  $v = \sin x$ .

3. 设  $f(x+1) = \frac{x+1}{x+5}$ , 求  $f(x)$ ,  $f(x-1)$ .

**解** 设  $x+1 = t$ , 则  $f(t) = \frac{t}{t+4}$ , 故  $f(x) = \frac{x}{x+4}$ ,  $f(x-1) = \frac{x-1}{x+3}$ .

4. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$  则  $f[f(x)] =$  \_\_\_\_\_.

解  $f[f(x)] = 1$ .

5. 设  $f(x) = \arcsin x$ , 求  $f(0), f(-1), f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right), f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ .

解  $f(0) = 0, f(-1) = -\frac{\pi}{2}, f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}, f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$ .

6. 设  $g(x) = \arctan x$ , 求  $g(0), g(1), g(\sqrt{3}), g(-1)$ .

解  $\arctan 0 = 0, \arctan 1 = \frac{\pi}{4}, \arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}, \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$ .

### 提高题

1. 设  $f(x)$  为奇函数,  $g(x)$  为偶函数, 试证:  $f[f(x)]$  为奇函数,  $g[f(x)]$  为偶函数.

证明 因为  $f[f(-x)] = f[-f(x)] = -f[f(x)]$ , 所以  $f[f(x)]$  为奇函数;

因为  $g[f(-x)] = g[-f(x)] = g[f(x)]$ , 所以  $g[f(x)]$  为偶函数.

2. 求下列函数的反函数:

(1)  $y = \frac{1-x}{1+x}$ ; (2)  $y = 2\sin 3x$ ; (3)  $y = \frac{2^x}{2^x+1}$ .

解 (1) 由  $y = \frac{1-x}{1+x}$ , 解得  $x = \frac{1-y}{1+y}$ , 故反函数为  $y = \frac{1-x}{1+x}$ .

(2) 由  $y = 2\sin 3x$ , 解得  $x = \frac{1}{3}\arcsin \frac{y}{2}$ , 故反函数为  $y = \frac{1}{3}\arcsin \frac{x}{2}$ .

(3) 由  $y = \frac{2^x}{2^x+1}$ , 解得  $x = \log_2 \frac{y}{1-y}$ , 故反函数为  $y = \log_2 \frac{x}{1-x}$ .

3. 设  $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ 0, & |x| = 1, \\ -1, & |x| > 1, \end{cases} g(x) = e^x$ , 求  $f[g(x)]$ .

解  $f[g(x)] = \begin{cases} 1, & e^x < 1 \\ 0, & e^x = 1 \\ -1, & e^x > 1 \end{cases} = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x > 0. \end{cases}$

### 习题 1.3

1. 设销售商品的总收入是销售量  $x$  的二次函数, 已知  $x = 0, 2, 4$  时, 总收入分别是 0, 6, 8, 试确定总收入函数  $R(x)$ .

解 设  $R(x) = ax^2 + bx + c$ , 由  $\begin{cases} 0 = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c, \\ 6 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c, \\ 8 = a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c, \end{cases}$  得  $a = -\frac{1}{2}, b = 4, c = 0$ . 故  $R(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x$ .

2. 设某厂生产某种产品 1000t, 定价为 130 元/t, 当一次售出 700t 以内时, 按原价出售; 若一次成交超过 700t 时, 超过 700t 的部分按原价的 9 折出售, 试将总收入表示成销售量的函数.

解  $R(x) = \begin{cases} 130x, & 0 \leq x \leq 700, \\ 91000 + 117(x - 700), & 700 < x \leq 1000. \end{cases}$

3. 已知需求函数为  $P = 10 - \frac{Q}{5}$ , 成本函数为  $C = 50 + 2Q$ ,  $P, Q$  分别表示价格和销售量, 写出利润  $L$  与销售量  $Q$  的关系, 并求平均利润 (单位产品获得的利润  $\frac{L}{Q}$ ).

解  $L(Q) = R(Q) - C(Q) = QP - C(Q) = Q\left(10 - \frac{Q}{5}\right) - (50 + 2Q) = 8Q - \frac{Q^2}{5} - 50$ ,

$\frac{L(Q)}{Q} = \frac{R(Q) - C(Q)}{Q} = 8 - \frac{Q}{5} - \frac{50}{Q}$ .



4. 已知需求函数  $Q_d$  和供给函数  $Q_s$  分别为  $Q_d = \frac{100}{3} - \frac{2}{3}P$ ,  $Q_s = 20 + 10P$ , 求相应的市场均衡价格(需求量与供给量相等时的价格即为均衡价格).

解 由  $Q_d = Q_s$ , 即  $\frac{100}{3} - \frac{2P}{3} = 20 + 10P$ , 得  $P = \frac{5}{4}$ .

#### 习题 1.4

1. 下列各数列是否收敛, 若收敛, 试指出其收敛于何值.

- (1)  $\{2^n\}$ ; (2)  $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ ; (3)  $\{(-1)^{n+1}\}$ ; (4)  $\left\{\frac{n-1}{n}\right\}$ ;  
 (5)  $x_n = \frac{1}{3^n}$ ; (6)  $x_n = 2 + \frac{1}{n^2}$ ; (7)  $x_n = (-1)^n n$ ; (8)  $x_n = \frac{1+(-1)^n}{1000}$ .

解 (1) 数列  $\{2^n\}$ , 即为  $2, 4, 8, \dots, 2^n, \dots$ . 易见, 当  $n$  无限增大时,  $2^n$  也无限增大, 故该数列是发散的;

(2) 数列  $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ , 即为  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ . 易见, 当  $n$  无限增大时,  $\frac{1}{n}$  无限接近于 0, 故该数列是收敛于 0;

(3) 数列  $\{(-1)^{n+1}\}$ , 即为  $1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n+1}, \dots$ . 易见, 当  $n$  无限增大时,  $(-1)^{n+1}$  无休止地反复取 1, -1 两个数, 而不会接近于任何一个确定的常数, 故该数列是发散的;

(4) 数列  $\left\{\frac{n-1}{n}\right\}$ , 即为  $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n-1}{n}, \dots$ . 易见, 当  $n$  无限增大时,  $\frac{n-1}{n}$  无限接近于 1, 故该数列是收敛于 1.

(5) 0;

(6) 2;

(7) 不存在;

(8) 不存在.

2. 是非题, 若非, 请举例说明.

(1) 设在常数  $a$  的无论怎样小的  $\varepsilon$  邻域内存在着  $\{x_n\}$  的无穷多点, 则  $\{x_n\}$  的极限为  $a$ . ( )

(2) 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = a, \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n-1} = a$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . ( )

(3) 设  $x_n = 0.11\dots 1$  ( $n$  个), 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{9}$ . ( )

(4) 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在, 而  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$  不存在, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n)$  不存在. ( )

(5) 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在, 而  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$  不存在, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n)$  不存在. ( )

(6) 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n, \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$  都存在, 且满足  $u_n < v_n$  ( $n=1, 2, \dots$ ), 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n < \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$ . ( )

解 (1) ( $\times$ ). 例如  $x_n = 1 + \frac{(-1)^n n}{2n+1}, a = \frac{3}{2}$ .

(2) ( $\checkmark$ ).

(3) ( $\checkmark$ ).

(4) ( $\checkmark$ ).

(5) ( $\times$ ). 例如  $x_n = \frac{1}{n}, y_n = \sin n, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \sin n$  不存在, 但  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin n = 0$  存在.

(6) ( $\times$ ). 例如  $u_n = \frac{1}{n^2+1}, v_n = \frac{1}{n}, u_n < v_n$  ( $n=1, 2, \dots$ ), 但  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ .

3. 如果  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$ . 举例说明反之未必成立.

证明 因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . 所以任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N > 0$ , 当  $n > N$  时, 有  $|x_n - a| < \varepsilon$ . 又  $||x_n| - |a|| \leq$

$|x_n - a| < \varepsilon (n > N)$  时, 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$ .

例如, 数列  $1, -1, 1, -1, \dots$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} |(-1)^{n-1}| = 1$ , 但  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n-1}$  不存在.

4. 求极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + e^{-x}}$ .

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

注  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ .

5. 证明数列  $x_n = (-1)^{n+1}$  是发散的.

证明 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , 由定义, 对于  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ,  $\exists N > 0$ , 使得当  $n > N$  时, 恒有  $|x_n - a| < \frac{1}{2}$ , 即当  $n > N$  时,  $x_n \in \left(a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}\right)$ , 区间长度为 1. 而  $x_n$  无休止地反复取 1, -1 两个数, 不可能同时位于长度为 1 的区间. 因此该数列是发散的.

注 此例同时也表明: 有界数列不一定收敛.

### 提高题

1. 用数列极限定义证明:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0; \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5+2n}{1-3n} = -\frac{2}{3}; \quad (3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-2}{n^2+n+1} = 1.$$

证明 (1) 由于  $|\sqrt{n+1} - \sqrt{n}| = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$ , 所以任给  $\varepsilon > 0$ , 取  $N = \left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right]$ , 当  $n > N$  时,

$$|\sqrt{n+1} - \sqrt{n}| < \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon. \text{ 所以 } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0.$$

(2) 由于  $\left|\frac{5+2n}{1-3n} - \left(-\frac{2}{3}\right)\right| = \left|\frac{17}{3(1-3n)}\right| = \left|\frac{17}{9n-3}\right| (n \geq 1)$ , 只要  $\frac{17}{9n-3} < \varepsilon$ , 解得  $n > \frac{17}{9\varepsilon} + \frac{1}{3}$ . 因此, 对任给的  $\varepsilon > 0$ , 取  $N = \left[\frac{17}{9\varepsilon} + \frac{1}{3}\right]$ , 则  $n > N$  时,  $\left|\frac{5+2n}{1-3n} - \left(-\frac{2}{3}\right)\right| < \varepsilon$  成立, 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5+2n}{1-3n} = -\frac{2}{3}$ .

(3) 由于  $\left|\frac{n^2-2}{n^2+n+1} - 1\right| = \left|\frac{3+n}{n^2+n+1}\right| < \frac{n+n}{n^2} = \frac{2}{n} (n > 3)$ , 要使  $\left|\frac{n^2-2}{n^2+n+1} - 1\right| < \varepsilon$ , 只要  $\frac{2}{n} < \varepsilon$ , 即  $n > \frac{2}{\varepsilon}$ , 因此, 对任给的  $\varepsilon > 0$ , 取  $N = \max\left\{3, \left[\frac{2}{\varepsilon}\right]\right\}$ , 当  $n > N$  时, 有  $\left|\frac{n^2-2}{n^2+n+1} - 1\right| < \varepsilon$ , 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-2}{n^2+n+1} = 1$ .

2. 若数列  $\{x_n\}$  有界, 又  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ , 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$ .

证明 因为  $\{x_n\}$  有界, 所以存在  $M > 0$ , 使得  $|x_n| < M (n = 1, 2, \dots)$ . 又因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ , 所以对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N > 0$ , 当  $n > N$  时有  $|y_n| < \frac{\varepsilon}{M}$ , 而  $|x_n y_n| = |x_n| |y_n| \leq M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$ . 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$ .

3. 设有两个数列  $\{u_n\}$  与  $\{v_n\}$ , 已知  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = a \neq 0$ , 又  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ , 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$ .

证明 因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = a \neq 0$ , 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{u_n}{v_n}} = \frac{1}{a}$ , 所以  $\left\{\frac{v_n}{u_n}\right\}$  有界, 而  $v_n = \frac{v_n}{u_n} \cdot u_n$  由数列极限的定义

及性质和上一题可知  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$ .

4. 证明: 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ , 则存在正整数  $N$ , 当  $n > N$  时, 不等式  $|x_n| > \frac{|A|}{2}$  成立.

证明 因  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ , 由数列极限的  $\varepsilon$ - $N$  定义知, 对任给的  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N > 0$ , 当  $n > N$  时, 恒有  $|x_n - A| < \varepsilon$ . 由于  $||x_n| - |A|| \leq |x_n - A|$ , 故  $n > N$  时, 恒有  $||x_n| - |A|| \leq \varepsilon$ , 从而有  $|A| - \varepsilon < |x_n| < |A| + \varepsilon$ , 由此可



见,只要取  $\varepsilon = \frac{|A|}{2}$ , 则当  $n=N$  时, 恒有  $|x_n| > \frac{|A|}{2}$ . 证毕.

5. 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在, 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{x_n}{n^2} = 0$ .

证明 因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在, 存在  $M > 0$  有  $|x_n| \leq M (n=1, 2, \dots)$ . 又因为  $\left| n \sin \frac{x_n}{n^2} \right| \leq \frac{|x_n|}{n} \leq \frac{M}{n}$ . 所以对  $\varepsilon > 0$  取  $N = \left[ \frac{M}{\varepsilon} \right]$ , 当  $n > N$  时, 有  $\left| n \sin \frac{x_n}{n^2} - 0 \right| \leq \frac{M}{n} < \varepsilon$ , 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{x_n}{n^2} = 0$ .

### 习题 1.5

1. 设  $y=2x-1$ , 问  $\delta$  等于多少时, 有: 当  $|x-4| < \delta$  时,  $|y-7| < 0.1$ ?

解 欲使  $|y-7| < 0.1$ , 即  $|y-7| = |(2x-1)-7| = |2x-8| = 2|x-4| < 0.1$ , 从而  $|x-4| < \frac{0.1}{2} = 0.05$ , 即当  $\delta=0.05$  时, 有: 当  $|x-4| < \delta$  时,  $|y-7| < 0.1$  (如图 1-3 所示).

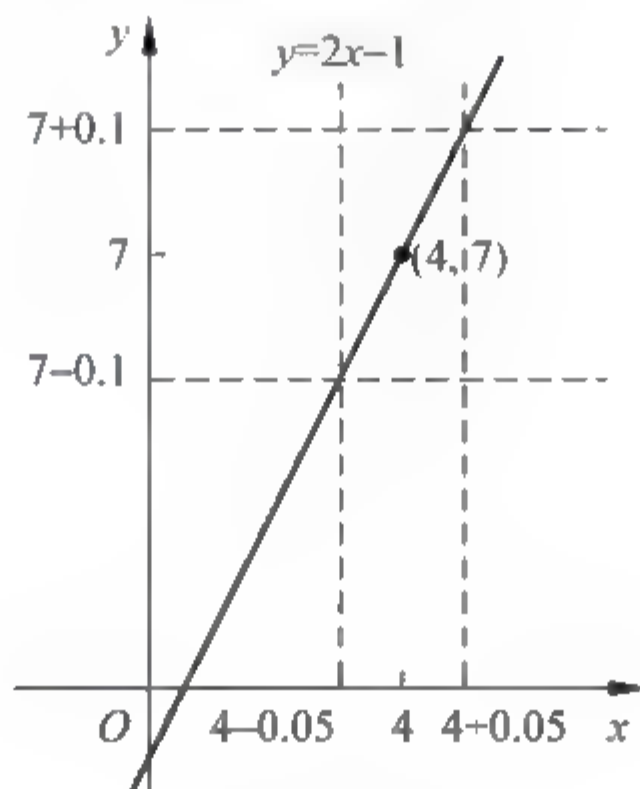


图 1-3

2. 设  $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x < 1, \\ 0, & x \geq 1, \end{cases}$  问  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  是否存在? 画出  $y=f(x)$  的图形.

解 由图形可知:  $\lim_{x \rightarrow 1^-} (2x-1) = 1$ , 而  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 0 = 0$ , 所以  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  不存在.

3. 验证  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$  不存在.

证明  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$ . 左右极限存在但不相等.

所以  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  不存在.

4. 设  $f(x) = \frac{1-a^{\frac{1}{x}}}{1+a^{\frac{1}{x}}}$  ( $a > 0$ ), 求  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

解  $f(x)$  在  $x=0$  处没有定义, 而

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{a^{-\frac{1}{x}} - 1}{a^{-\frac{1}{x}} + 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-a^{-\frac{1}{x}}}{a^{-\frac{1}{x}}} = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - a^{\frac{1}{x}}}{1 + a^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{1} = 1,$$

故  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  不存在.

5. 判断极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x$  是否存在, 并说明理由.

解 由于  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$ , 所以  $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x$  不存在.

## 提高题

若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - A > 0$ , 证明在  $x_0$  的某一个去心邻域内  $f(x) > 0$ .

证明 因为  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A > 0$ , 由极限定义, 取  $\epsilon = \frac{A}{2}$ , 存在  $\delta > 0$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 有  $|f(x) - A| < \frac{A}{2}$ , 即  $0 < \frac{A}{2} = A - \frac{A}{2} < f(x) < A + \frac{A}{2}$ , 所以  $f(x) > 0 (0 < |x - x_0| < \delta)$ .

## 习题 1.6

## 1. 选择题

(1)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - \sin x}{2x^2 + \sin x}$  ( ).

A. 不存在

B. 0

C. 2

D.  $\frac{1}{2}$ 

(2) 设  $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}} + 1}{2e^{-\frac{1}{x}} + 1}$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  ( ).

A.  $\infty$ 

B. 不存在

C. 0

D.  $\frac{1}{2}$ 

(3) 设  $f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 1, \\ 3+x, & x > 1; \end{cases} g(x) = \begin{cases} x^3, & x \leq 1, \\ 2x-1, & x > 1. \end{cases}$  则  $\lim_{x \rightarrow 1} f[g(x)]$  ( ).

A. -1

B. 1

C. 4

D. 不存在

(4)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1+a)x^4 + bx^3 + 2}{x^3 + x^2 - 1} = -2$ , 则  $a, b$  的值分别为 ( ).

A.  $a = -3, b = 0$ B.  $a = 0, b = -2$ C.  $a = -1, b = 0$ D.  $a = -1, b = -2$ 

(5) 设  $0 < a < b$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} =$  ( ).

A. 1

B. 0

C.  $a$ D.  $b$ 

答案 (1) D; (2) B; (3) D; (4) D; (5) D.

## 2. 求下列各式的极限:

(1)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x+1)^{70} (8x-1)^{30}}{(5x+2)^{100}}$ ; (2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3}{2x^2-1} - \frac{x^2}{2x+1} \right)$ ; (3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{x+\sqrt{x}}}$ ;

(4)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$ ; (5)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2+1} - x)$ ; (6)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1}$ ;

(7)  $\lim_{t \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1-t} - \frac{2}{1-t^2} \right)$ ; (8)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} \right)$ ; (9)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ ;

(10)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$ ; (11)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^2+2x-3}$ ; (12)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})(1-\sqrt[4]{x})}{(1-x)^3}$ .

解 (1)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x+1)^{70} (8x-1)^{30}}{(5x+2)^{100}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(3 + \frac{1}{x}\right)^{70} \left(8 - \frac{1}{x}\right)^{30}}{\left(5 + \frac{2}{x}\right)^{100}} = \frac{3^{70} 8^{30}}{5^{100}}.$

(2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3}{2x^2-1} - \frac{x^2}{2x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3(2x+1) - x^2(2x^2-1)}{(2x^2-1)(2x+1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x^2}{(2x^2-1)(2x+1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{4x^3} = \frac{1}{4}.$

(3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{x+\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}}}}} = 1.$



或用抓大头  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{x} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{3\sqrt{x}} = \frac{1}{3}$ .

$$(4) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x+h) = 2x.$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2+1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1} + x} = \frac{1}{2}.$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(2x+1)}{x-1} = 3.$$

$$(7) \lim_{t \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1-t} - \frac{2}{1-t^2} \right) = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t-1}{1-t^2} = -\frac{1}{2}.$$

$$(8) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}.$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{1-x^3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x^2+x+1} = 1.$$

(11)  $x \rightarrow 1$  时, 分子和分母的极限都是零 ( $\frac{0}{0}$  型), 先约去不为零的无穷小因子  $x-1$  后再求极限.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^2+2x-3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x+3)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x+3} = \frac{1}{2}. \quad (\text{消去零因子法})$$

(12) 因分母的极限为 0, 故不能应用极限运算法则, 而要先对函数做必要的变形, 因分子中含有根式, 通常用根式有理化, 然后约去分子分母中的公因子.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})(1-\sqrt[4]{x})}{(1-x)^3} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)(1-x)(1-x)}{(1-x)^3(1+\sqrt{x})(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})(1+\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{x^2}+\sqrt[4]{x^3})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(1+\sqrt{x})(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})(1+\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{x^2}+\sqrt[4]{x^3})} = \frac{1}{24}. \end{aligned}$$

3. 设  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - ax^2 - x + 4}{x+1} = m$ , 试求  $a$  及  $m$  的值.

解 因为  $\lim_{x \rightarrow -1} (x+1) = 0$ , 所以  $\lim_{x \rightarrow -1} (x^3 - ax^2 - x + 4) = 1 - a + 1 + 4 = 0$ , 故  $a = 4$ . 于是

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 4x^2 - x + 4}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - 5x + 4)}{x+1} = 10, \quad \text{即 } m = 10.$$

4. 已知  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (5x - \sqrt{ax^2 - bx + c}) = 2$ , 求  $a, b$  之值.

解 因  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (5x - \sqrt{ax^2 - bx + c}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(5x - \sqrt{ax^2 - bx + c})(5x + \sqrt{ax^2 - bx + c})}{5x + \sqrt{ax^2 - bx + c}}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(25-a)x^2 + bx - c}{5x + \sqrt{ax^2 - bx + c}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(25-a)x + b - \frac{c}{x}}{5 + \sqrt{a - \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}}} = 2,$$

$$\text{故 } \begin{cases} 25-a=0, \\ \frac{b}{5+\sqrt{a}}=2, \end{cases} \text{ 解得 } a=25, b=20.$$

5. 已知  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-3}, & x \geq 3, \\ x+a, & x < 3, \end{cases}$  且  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$  存在, 求  $a$ .

解  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (x+a) = 3+a$ ,  $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \sqrt{x-3} = 0$ . 因为  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$  存在, 所以  $3+a = 0$ , 从

而  $a = -3$ .

$$6. \text{ 已知 } f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0, \\ \frac{x^2+3x-1}{x^3+1}, & x \geq 0, \end{cases} \text{ 求 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$$

解 因为  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x-1) = -1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2+3x-1}{x^3+1} = -1$ , 所以  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$ . 此外, 易求得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+3x-1}{x^3+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^3}} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1) = -\infty.$$

### 提高题

1. 设数列  $\{x_n\}$  收敛, 则 ( ).

A. 当  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin x_n = 0$  时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

B. 当  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + \sqrt{|x_n|}) = 0$  时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

C. 当  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + x_n^2) = 0$  时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

D. 当  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + \sin x_n) = 0$  时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

答案 D.

### 习题 1.7

1. 计算下列极限:

$$\begin{aligned} (1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \omega x}{x}; & \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\tan 5x}; & \quad (3) \lim_{x \rightarrow 0} x \cot x; & \quad (4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x}; \\ (5) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}; & \quad (6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}; & \quad (7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 2x}{x + \sin 2x}; & \quad (8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}. \end{aligned}$$

解 (1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \omega x}{x} = \omega \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \omega x}{\omega x} = \omega.$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\tan 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\tan 3x}{3x}}{\frac{\tan 5x}{5x}} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5}.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} x \cot x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = 1.$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{x \sin x} = 2.$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2 \cos \frac{x+a}{2} \sin \frac{x-a}{2}}{x - a} = \cos a.$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{\sin(\arcsin x)} = 1.$$

另法: 令  $y = \arcsin x$ , 则有  $x = \sin y$ , 且当  $x \rightarrow 0$  时,  $y \rightarrow 0$ , 故  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} = 1.$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 2x}{x + \sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{\sin 2x}{x}}{1 + \frac{\sin 2x}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2 \frac{\sin 2x}{2x}}{1 + 2 \frac{\sin 2x}{2x}} = \frac{1-2}{1+2} = -\frac{1}{3}.$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x \sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin 2x}{2x} \cdot \frac{\sin x}{x} = 4.$$

2. 计算下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+2x)^{\frac{1}{x}};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x}{x}\right)^{2x};$$



$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+3}{2x+1} \right)^{x+1}; \quad (5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3+x}{2+x} \right)^{2x}; \quad (6) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2}{x^2-1} \right)^x.$$

解 (1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+2x)^{\frac{1}{x}} = \ln \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}} = \ln [\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{2x}}]^2 = 2.$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^{\frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^{x \cdot \frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1+x}{x} \right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^{2x} = e^2.$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+3}{2x+1} \right)^{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left( 1 + \frac{3}{2x} \right)^{\frac{2x}{3} \cdot \frac{3}{2} + 1}}{\left( 1 + \frac{1}{2x} \right)^{2x \cdot \frac{1}{2} + 1}} = \frac{e^{\frac{3}{2}}}{e^{\frac{1}{2}}} = e.$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3+x}{2+x} \right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \frac{1}{x+2} \right)^x \right]^2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \frac{1}{x+2} \right)^{x+2-2} \right]^2 \\ = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \frac{1}{x+2} \right)^{x+2} \right]^2 \left( 1 + \frac{1}{x+2} \right)^{-4} = e^2.$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2}{x^2-1} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x^2-1} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \frac{1}{x^2-1} \right)^{x^2-1} \right]^{\frac{x}{x^2-1}} = e^0 = 1.$$

3. 求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n+\sqrt{1}} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{n+\sqrt{n}} \right);$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{1}{n^2+\pi} + \frac{1}{n^2+2\pi} + \cdots + \frac{1}{n^2+n\pi} \right);$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2+(-1)^n}{2^n}};$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} (1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}};$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^2} \right);$$

$$(6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n}.$$

解 (1) 因为  $\frac{n}{n+\sqrt{n}} < \frac{1}{n+\sqrt{1}} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{n+\sqrt{n}} < \frac{n}{n+\sqrt{1}}$ , 而  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+\sqrt{n}} = 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+\sqrt{1}} = 1$ , 所以由夹

逼准则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n+\sqrt{1}} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{n+\sqrt{n}} \right) = 1.$

(2) 因为  $\frac{n^2}{n^2+n\pi} < n \left( \frac{1}{n^2+\pi} + \frac{1}{n^2+2\pi} + \cdots + \frac{1}{n^2+n\pi} \right) < \frac{n^2}{n^2+\pi}$ , 而  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2+n\pi} = 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2+\pi} = 1$ , 所以由

夹逼准则  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{1}{n^2+\pi} + \frac{1}{n^2+2\pi} + \cdots + \frac{1}{n^2+n\pi} \right) = 1.$

(3) 因为  $\frac{1}{2} = \frac{\sqrt[3]{1}}{2} \leq \sqrt[n]{\frac{2+(-1)^n}{2^n}} \leq \frac{\sqrt[3]{3}}{2}$ , 而  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{3}}{2} = \frac{1}{2}$ , 所以由夹逼准则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2+(-1)^n}{2^n}} = \frac{1}{2}.$

(4) 由  $(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}} = 3 \left[ 1 + \left( \frac{2}{3} \right)^n + \left( \frac{1}{3} \right)^n \right]^{\frac{1}{n}}$ , 易见对任意自然数  $n$ , 有

$$1 < 1 + \left( \frac{2}{3} \right)^n + \left( \frac{1}{3} \right)^n < 3,$$

故  $3 \cdot 1^{\frac{1}{n}} < 3 \left[ 1 + \left( \frac{2}{3} \right)^n + \left( \frac{1}{3} \right)^n \right]^{\frac{1}{n}} < 3 \cdot 3^{\frac{1}{n}}$ . 而  $\lim_{n \rightarrow \infty} 3 \cdot 1^{\frac{1}{n}} = 3$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} 3 \cdot 3^{\frac{1}{n}} = 3$ , 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \left[ 1 + \left( \frac{2}{3} \right)^n + \left( \frac{1}{3} \right)^n \right]^{\frac{1}{n}} = 3.$$

(5) 设  $x_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^2}$ . 显然

$$\frac{n+1}{4n^2} = \frac{1}{(2n)^2} + \frac{1}{(2n)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2} < x_n < \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} = \frac{n+1}{n^2}.$$

又  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{4n^2} = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n^2} = 0$ , 由夹逼准则知  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ , 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^2} \right) = 0.$$

(6) 由  $\frac{n!}{n^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{n \cdot n \cdot n \cdots n} < \frac{1 \cdot 2 \cdot n \cdot n \cdots n}{n \cdot n \cdot n \cdots n} = \frac{2}{n}$ , 易见  $0 < \frac{n!}{n^n} < \frac{2}{n}$ . 又  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0$ . 所以由夹逼

准则知  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$ .

4. 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \sec \frac{\pi x}{2}; \quad (3) \lim_{x \rightarrow 0} (1+3 \tan^2 x)^{\cot^2 x};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1}{x+3} \right)^{x+2}; \quad (5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2}{x^2-1} \right)^x.$$

解 (1)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1.$

(2) 令  $1-x=t$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \sec \frac{\pi x}{2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin \frac{\pi t}{2}} = \frac{2}{\pi} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi t}{2}}{\sin \frac{\pi t}{2}} = \frac{2}{\pi}.$

(3)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+3 \tan^2 x)^{\cot^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ (1+3 \tan^2 x)^{\frac{1}{3 \tan^2 x}} \right]^3 = e^3.$

(4)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1}{x+3} \right)^{x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 - \frac{4}{x+3} \right)^{\frac{x+3}{-4}} \right]^{-4} \cdot \left( \frac{x-1}{x+3} \right)^{-1} = e^{-4}.$

(5)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2}{x^2-1} \right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \frac{1}{x^2-1} \right)^{x^2-1} \right]^{\frac{x^2}{x^2-1}} = e.$

### 提高题

1. 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x + 2x \sin x)^{\frac{1}{x^4}}; \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}; \quad (3) \lim_{x \rightarrow \infty} x \left[ \sin \ln \left( 1 + \frac{3}{x} \right) - \sin \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \right];$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x + \cos x)^{\frac{1}{x}}; \quad (5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x^3}; \quad (6) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{n} \right)^{(-1)^n}.$$

解 (1)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x + 2x \sin x)^{\frac{1}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos 2x + 2x \sin x - 1)^{\frac{1}{x^4}}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ (1 + \cos 2x + 2x \sin x - 1)^{\frac{1}{\cos 2x + 2x \sin x - 1}} \right]^{\frac{\cos 2x + 2x \sin x - 1}{x^4}}$   
 $= e^{\frac{1}{3}}.$

注  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x + 2x \sin x - 1}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin x - 2 \sin^2 x}{x^4} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{x - \sin x}{x^3} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = 2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$  在下一节将学到.

(2) 令  $\sqrt[n]{n} = 1 + r_n (r_n \geq 0)$ , 则

$$n = (1 + r_n)^n = 1 + nr_n + \frac{n(n-1)}{2!} r_n^2 + \cdots + r_n^n > \frac{n(n-1)}{2!} r_n^2 (n > 1), \text{ 因此, } 0 \leq r_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

由于  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{n-1}} = 0$ , 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$ . 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + r_n) = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 1.$



$$\begin{aligned}
 (3) \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \ln \left( 1 + \frac{3}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \ln \left( 1 + \frac{3}{x} \right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \ln \left( 1 + \frac{3}{x} \right)}{\ln \left( 1 + \frac{3}{x} \right)} \cdot x \ln \left( 1 + \frac{3}{x} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left( 1 + \frac{3}{x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left( 1 + \frac{3}{x} \right)^{\frac{x}{3} \cdot 3} = 3.
 \end{aligned}$$

同理  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \left[ \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \right] = 1$ , 所以  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \sin \ln \left( 1 + \frac{3}{x} \right) - \sin \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \right] = 3 - 1 = 2$ .

$$(4) \text{ 解法一 } \text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} [(\sin x + \cos x)^2]^{\frac{1}{2x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin 2x)^{\frac{1}{2x}} = \lim_{x \rightarrow 0} [(1 + \sin 2x)^{\frac{1}{\sin 2x}}]^{\frac{\sin 2x}{2x}} = e.$$

$$\text{解法二: 令 } y = (\sin x + \cos x)^{\frac{1}{x}}, \text{ 则有 } \ln y = \frac{1}{x} \ln(\sin x + \cos x), \text{ 而 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin x + \cos x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}$$

1, 所以原式 = e.

$$\begin{aligned}
 (5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3 (\sqrt{1 + \tan x} + \sqrt{1 + \sin x})} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin x \cos x}{x^3 \cos x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

$$(6) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{n} \right)^{(-1)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{(-1)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{n \cdot \frac{(-1)^n}{n}} = e^0 = 1.$$

2. 设数列  $\{x_n\}$  满足  $0 < x_1 < \pi, x_{n+1} = \sin x_n (n=1, 2, \dots)$ .

(1) 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在, 并求该极限; (2) 计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}}$ .

(1) 证明  $x_2 = \sin x_1 < x_1, \dots, x_{n+1} = \sin x_n < x_n$ , 且  $0 < x_n < \pi$ , 故  $\{x_n\}$  单调有界,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在. 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$ , 在数列递推公式  $x_{n+1} = \sin x_n$  两端取极限, 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin x_n, \text{ 即有 } l = \sin l, \text{ 得 } l = 0, \text{ 即 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

(2) 解  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sin x_n}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}}$  是  $1^\infty$  型极限.

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sin x_n}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{\sin x_n - x_n}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{\sin x_n - x_n}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}} \\
 &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n^2} \cdot \frac{\sin x_n - x_n}{x_n}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n^2} \cdot \frac{\sin x_n - x_n}{x_n}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{6}x^3}{x^3}} = e^{-\frac{1}{6}}.
 \end{aligned}$$

(本题用到  $\sin x - x \sim -\frac{1}{6}x^3$ )

3. 设  $0 < x_1 < 3, x_{n+1} = \sqrt{x_n(3-x_n)}$ , 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在, 并求该极限.

证明 因为  $0 < x_1 < 3$ , 知  $x_1(3-x_1)$  均为正数, 因此有

$$0 < x_2 = \sqrt{x_1(3-x_1)} \leq \frac{x_1 + (3-x_1)}{2} = \frac{3}{2} \quad (\text{算术平均数大于等于几何平均数}).$$

$$\text{设 } 0 < x_k \leq \frac{3}{2} (k > 1), \text{ 则 } 0 < x_{k+1} = \sqrt{x_k(3-x_k)} \leq \frac{x_k + (3-x_k)}{2} = \frac{3}{2}.$$

由数学归纳法, 对任意的正整数  $n > 1$ , 均有  $0 < x_n \leq \frac{3}{2}$ , 因而数列  $\{x_n\}$  有界.

又  $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\sqrt{3x_n - x_n^2}}{x_n} = \sqrt{\frac{3}{x_n} - 1} \geq \sqrt{2-1} = 1$ , 故知  $x_{n+1} \geq x_n$ ,  $\{x_n\}$  单调增加有界, 从而  $\{x_n\}$  的极限存在.

设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$ , 在  $x_{n+1} = \sqrt{x_n(3-x_n)}$  两边取极限, 得  $l = \sqrt{l(3-l)}$ , 解得  $l = 0$  或  $l = \frac{3}{2}$ . 因  $0 < x_n \leq \frac{3}{2}$  且

单调增加,故  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{3}{2}$ . 舍去  $l = 0$ .

4. 设  $u_1 = 1, u_2 = 2, n \geq 3$  时,  $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ .

(1) 求证:  $\frac{3}{2}u_{n-1} < u_n < 2u_{n-1}$ ; (2) 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{u_n}$ .

证明 (1) 因为  $u_1 = 1, u_2 = 2$ , 当  $n \geq 3$  时,  $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ , 所以,  $u_n > 0$ . 又  $u_n = u_{n-1} + u_{n-2} > u_{n-1}$ , 所以,  $\{u_n\}$  单调增加.

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} < 2u_{n-1} (n \geq 3), \quad u_n = u_{n-1} + u_{n-2} > u_{n-1} + \frac{1}{2}u_{n-1} = \frac{3}{2}u_{n-1} (n \geq 3),$$

所以,  $\frac{3}{2}u_{n-1} < u_n < 2u_{n-1}$ .

(2) 由(1)知:  $\frac{3}{2}u_{n-1} < u_n$ , 所以

$$0 < \frac{1}{u_n} < \frac{2}{3u_{n-1}} < \left(\frac{2}{3}\right)^2 \frac{1}{u_{n-2}} < \dots < \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \frac{1}{u_1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.$$

故  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{u_n} = 0$ .

### 习题 1.8

1. 举例说明: 在某极限过程中, 两个无穷小量之商、两个无穷大量之商、无穷小量与无穷大量之积都不一定是无穷小量, 也不一定是无穷大量.

解 例 1, 当  $x \rightarrow 0$  时,  $\tan x, \sin x$  都是无穷小量, 但由  $\frac{\sin x}{\tan x} = \cos x$  (当  $x \rightarrow 0$  时,  $\cos x \rightarrow 1$ ) 不是无穷大量, 也不是无穷小量.

例 2, 当  $x \rightarrow \infty$  时,  $2x$  与  $x$  都是无穷大量, 但  $\frac{2x}{x} = 2$  不是无穷大量, 也不是无穷小量.

例 3, 当  $x \rightarrow 0^+$  时,  $\tan x$  是无穷小量, 而  $\cot x$  是无穷大量, 但  $\tan x \cdot \cot x = 1$  不是无穷大量, 也不是无穷小量.

2. 判断下列命题是否正确:

- (1) 无穷小量与无穷小量的商一定是无穷小量;
- (2) 有界函数与无穷小量之积为无穷小量;
- (3) 有界函数与无穷大量之积为无穷大量;
- (4) 有限个无穷小量之和为无穷小量;
- (5) 有限个无穷大量之和为无穷大量;
- (6)  $y = x \sin x$  在  $(-\infty, +\infty)$  内无界, 但  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin x \neq \infty$ ;
- (7) 无穷大量的倒数都是无穷小量;
- (8) 无穷小量的倒数都是无穷大量.

解 (1) 错误, 例如, 第 1 题例 1.

(2) 正确.

(3) 错误. 例如, 当  $x \rightarrow 0$  时,  $\cot x$  为无穷大量,  $\sin x$  是有界函数,  $\cot x \cdot \sin x = \cos x$  不是无穷大量.

(4) 正确.

(5) 错误. 例如, 当  $x \rightarrow 0$  时,  $\frac{1}{x}$  与  $-\frac{1}{x}$  都是无穷大量, 但它们之和  $\frac{1}{x} + \left(-\frac{1}{x}\right) = 0$  不是无穷大量.

(6) 正确. 因为  $\forall M > 0, \exists$  正整数  $k$ , 使  $2k\pi + \frac{\pi}{2} > M$ , 从而  $f\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$

$2k\pi + \frac{\pi}{2} > M$ , 即  $y = x \sin x$  在  $(-\infty, +\infty)$  内无界. 又  $\forall M > 0$ , 无论  $X$  多么大, 总存在正整数  $k$ , 使  $k\pi > X$ ,



使  $f(2k\pi) = k\pi \sin(k\pi) = 0 < M$ , 即  $x \rightarrow +\infty$  时,  $|x \sin x|$  不无限增大, 即  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin x \neq \infty$ .

(7) 正确.

(8) 错误. 只有非零的无穷小量的倒数才是无穷大量. 零是无穷小量, 但其倒数无意义.

3. 指出下列函数哪些是该极限过程中的无穷小量, 哪些是极限过程中的无穷大量.

(1)  $f(x) = \frac{3}{x^2 - 4}, x \rightarrow 2;$

(2)  $f(x) = \ln x, x \rightarrow 1, x \rightarrow 0^+, x \rightarrow +\infty;$

(3)  $f(x) = e^{\frac{1}{x}}, x \rightarrow 0^+, x \rightarrow 0^-;$

(4)  $f(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x, x \rightarrow +\infty;$

(5)  $f(x) = \frac{1}{x} \sin x, x \rightarrow \infty;$

(6)  $f(x) = \frac{1}{x^2} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}, x \rightarrow \infty.$

解 (1) 因为  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4) = 0$ , 即  $x \rightarrow 2$  时,  $x^2 - 4$  是无穷小量, 所以  $\frac{3}{x^2 - 4}$  是无穷大量, 因而  $\frac{3}{x^2 - 4}$  也是无穷大量.

(2) 从  $f(x) = \ln x$  的图像可以看出,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty, \lim_{x \rightarrow 1} \ln x = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ , 所以, 当  $x \rightarrow 0^+$  时,  $x \rightarrow +\infty$  时,  $f(x) = \ln x$  是无穷大量; 当  $x \rightarrow 1$  时,  $f(x) = \ln x$  是无穷小量.

(3) 从  $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$  的图可以看出,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$ . 所以, 当  $x \rightarrow 0^+$  时,  $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$  是无穷大量; 当  $x \rightarrow 0^-$  时,  $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$  是无穷小量.

(4) 因为  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\pi}{2} - \arctan x \right) = 0$ , 所以当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $f(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x$  是无穷小量.

(5) 因为当  $x \rightarrow \infty$  时,  $\frac{1}{x}$  是无穷小量,  $\sin x$  是有界函数, 所以  $\frac{1}{x} \sin x$  是无穷小量.

(6) 因为当  $x \rightarrow \infty$  时,  $\frac{1}{x^2}$  是无穷小量,  $\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$  是有界变量, 所以  $\frac{1}{x^2} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$  是无穷小量.

4. 求  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$ .

解 因为  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \sin x$ , 而当  $x \rightarrow \infty$  时,  $\frac{1}{x}$  是无穷小量,  $\sin x$  是有界量 ( $|\sin x| \leq 1$ ), 所以  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ .

5. 当  $x \rightarrow 0$  时, 判断下列各无穷小对无穷小  $x$  的阶:

(1)  $\sqrt{x} + \sin x;$  (2)  $x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{2}};$  (3)  $\sqrt[3]{x} - 3x^3 + x^5.$

解 (1) 因为  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} + \sin x}{\sqrt{x}} = 1$ , 所以当  $x \rightarrow 0$  时  $\sqrt{x} + \sin x$  是  $x$  的  $\frac{1}{2}$  阶无穷小.

(2) 因为  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} (x^{\frac{1}{6}} - 1) = -1$ , 所以当  $x \rightarrow 0$  时  $x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{2}}$  是  $x$  的  $\frac{1}{2}$  阶无穷小.

(3) 因为  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} - 3x^3 + x^5}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 3x^{\frac{8}{3}} + x^{\frac{14}{3}}) = 1$ , 所以当  $x \rightarrow 0$  时是  $x$  的  $\frac{1}{3}$  阶无穷小.

6. 比较下列各组无穷小:

(1) 当  $x \rightarrow 1$  时,  $\frac{1-x}{1+x}$  与  $1-\sqrt{x}$ ; (2) 当  $x \rightarrow 0$  时,  $(1-\cos x)^2$  与  $\sin^2 x$ ;

(3) 当  $x \rightarrow 1$  时,  $1-x$  与  $1-\sqrt[3]{x}$ .

解 (1) 因为  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{1+x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(1+x)(1-\sqrt{x})} = 1$ , 所以当  $x \rightarrow 1$  时,  $\frac{1-x}{1+x} \sim 1-\sqrt{x}$ .

(2) 因为  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)^2}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{2}x^2\right)^2}{x^2} = 0$ , 故  $(1 - \cos x)^2$  为比  $\sin^2 x$  高阶的无穷小.

(3) 因为  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{1-\sqrt[3]{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(1-\sqrt[3]{x})(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})} = \lim_{x \rightarrow 1} (1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}) = 3$ , 所以, 无穷小  $1-x$  是  $1-\sqrt[3]{x}$

的同阶无穷小.

7. 利用等价无穷小代换, 求下列各极限:

$$\begin{aligned} (1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x}; & \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x + x^2 \cos \frac{1}{x}}{(1 + \cos x) \ln(1+x)}; & \quad (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \sin 2x}; \\ (4) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x} \right); & \quad (5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\ln(x+1)}; & \quad (6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{x^2}; \\ (7) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} (\sqrt[n]{a} - 1); & \quad (8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(a+x) + \ln(a-x) - 2 \ln a}{x^2}. \end{aligned}$$

解 (1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{x^2} = 2$ ;

(2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x + x^2 \cos \frac{1}{x}}{(1 + \cos x) \ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x + x^2 \cos \frac{1}{x}}{2x} = \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} x \cos \frac{1}{x} = \frac{3}{2}$ ;

(3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x + \cos^2 x)}{2x^2} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{2x^2} = \frac{3}{4}$ ;

(4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin x \tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \frac{1 - \cos x}{\cos x}}{\sin x \tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\tan x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{x} = 0$ ;

(5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\ln(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x} = 2$ ;

(6)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{3}}{x^2} = \frac{1}{3}$ ;

(7)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} (\sqrt[n]{a} - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} (e^{\frac{1}{n} \ln a} - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n} \ln a}{n} = 0$ ;

(8)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(a+x) + \ln(a-x) - 2 \ln a}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{a^2 - x^2}{a^2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^2}{a^2}}{x^2} = -\frac{1}{a^2}$ .

8. 已知  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x} - 1}{e^{3x} - 1} = 2$ , 求  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

解 因为  $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{3x} - 1) = 0$ , 所以,  $2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x} - 1}{e^{3x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} f(x) \sin 2x}{3x} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ , 所以

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 6$ .

### 提高题

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{100} + 3x^2 + 2}{e^x + 8} (2 + \cos x) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

解  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{100} + 3x^2 + 2}{e^x + 8} = 0$ ,  $2 + \cos x$  有界, 故  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{100} + 3x^2 + 2}{e^x + 8} (2 + \cos x) = 0$ .

2. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3 + \ln(1+x^5)} \left[ \left( \frac{2 + \cos x}{3} \right)^x - 1 \right]$ .



解 原式  $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{2+\cos x}{3}} - 1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln \left( \frac{2+\cos x}{3} \right)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left( 1 + \frac{\cos x - 1}{3} \right)}{x^2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos x - 1}{3}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-x^2}{6}}{x^2} = -\frac{1}{6}.$$

3. 当  $x \rightarrow 0$  时, 函数  $e^{\tan x} - e^{\sin x}$  与  $x^n$  是同阶的无穷小量, 则  $n =$  \_\_\_\_\_.

解  $e^{\tan x} - e^{\sin x} = e^{\sin x} (e^{\tan x - \sin x} - 1) \sim \tan x - \sin x \sim \frac{1}{2}x^3$ , 所以  $n = 3$ .

4. 当  $x \rightarrow 0^+$  时, 若  $\ln^a(1+2x)$ ,  $(1-\cos x)^{\frac{1}{a}}$  均是比  $x$  高阶的无穷小, 求  $a$  的取值范围.

解  $\ln^a(1+2x) \sim (2x)^a = 2^a x^a$ ,  $(1-\cos x)^{\frac{1}{a}} \sim \left(\frac{1}{2}x^2\right)^{\frac{1}{a}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{a}} x^{\frac{2}{a}}$ .

根据题意知,  $x^a = o(x)$ ,  $x^{\frac{2}{a}} = o(x)$ , 则有  $a > 1$  且  $\frac{2}{a} > 1$ , 所以  $1 < a < 2$ .

5. 设  $a_1 = x(\cos \sqrt{x} - 1)$ ,  $a_2 = \sqrt{x} \ln(1 + \sqrt[3]{x})$ ,  $a_3 = \sqrt[3]{x+1} - 1$ . 当  $x \rightarrow 0^+$  时, 以上 3 个无穷小量按照从低阶到高阶顺序排列.

解  $a_1 = x(\cos \sqrt{x} - 1) \sim x \cdot \left(-\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2\right) = -\frac{1}{2}x^2$ ,

$$a_2 = \sqrt{x} \ln(1 + \sqrt[3]{x}) \sim \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} = x^{\frac{5}{6}}, \quad a_3 = \sqrt[3]{x+1} - 1 = (1+x)^{\frac{1}{3}} - 1 \sim \frac{1}{3}x.$$

则 3 个无穷小量从低阶到高阶排列为  $a_2, a_3, a_1$ .

6. 当  $x \rightarrow 0^+$  时,  $\sqrt{x+\sqrt{x}}$  与  $1-\cos x^a$  是同阶无穷小量, 求  $a$ .

解  $\sqrt{x+\sqrt{x}} \sim x^{\frac{1}{4}}$ ,  $1-\cos x^a \sim \frac{1}{2}x^{2a}$ , 则  $2a = \frac{1}{4}$ ,  $a = \frac{1}{8}$ .

7. 根据定义证明: 当  $x \rightarrow 0$  时,  $y = x^2 \sin \frac{1}{x}$  为无穷小.

证明  $\forall \varepsilon > 0$ , 要使  $\left|x^2 \sin \frac{1}{x} - 0\right| = |x^2| \left|\sin \frac{1}{x}\right| \leq x^2 < \varepsilon$ , 只需  $|x| < \sqrt{\varepsilon}$ . 取  $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ , 则当  $0 < |x-0| < \delta$  时, 恒有  $\left|x^2 \sin \frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon$ , 所以  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$ .

8. 证明: 函数  $y = \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$  在区间  $(0, 1]$  上无界, 但当  $x \rightarrow 0^+$  时, 该函数不是无穷大.

证明 对于任意给定的正数  $M$ , 取  $x = \frac{1}{k\pi} (k \in \mathbf{N})$ , 则  $\left|\frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}\right| = k\pi$ .

只要  $k > \frac{M}{\pi}$ , 就有  $\left|\frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}\right| > M$ . 这表明  $y = \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$  在  $(0, 1]$  上无界. 但它不是无穷大. 因为对于任

意给定的正数  $M$ , 取  $x = \frac{1}{k\pi + \frac{\pi}{2}} (k \in \mathbf{N})$ , 则  $\left|\frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}\right| = 0$  不大于  $M$ .

9. 设函数  $y = \frac{1+2x}{x}$ , 问  $x$  应满足什么条件能使  $|y| > 10^4$ ? 并证明  $x \rightarrow 0$  时该函数是无穷大.

解 因为  $\left|\frac{1+2x}{x}\right| \geq 2 + \frac{1}{|x|}$ , 要使  $\left|\frac{1+2x}{x}\right| > 10^4$ , 只要  $2 + \frac{1}{|x|} > 10^4$ , 即  $|x| < \frac{1}{10^4 - 2}$ . 对于任意给定的正数  $M$ , 要使  $\left|\frac{1+2x}{x}\right| > M$ , 只要  $2 + \frac{1}{|x|} > M$ , 即  $|x| < \frac{1}{M-2}$ . 这表明  $x \rightarrow 0$  时函数是无穷大.

10. 设  $\alpha, \beta$  是无穷小, 证明: 如果  $\alpha \sim \beta$ , 则  $\beta = o(\alpha)$ ; 反之, 如果  $\beta = o(\alpha)$ , 则  $\alpha \sim \beta$ .

证明 设  $\alpha \sim \beta$ , 则  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$ , 故  $\lim \frac{\beta - \alpha}{\alpha} = \lim \left(\frac{\beta}{\alpha} - 1\right) = 0$ , 故  $\beta - \alpha = o(\alpha)$ .

设  $\beta = \alpha + o(\alpha)$ , 则  $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\beta - \alpha}{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left( \frac{\beta}{\alpha} - 1 \right) = 0$ , 所以  $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\beta}{\alpha} = 1$ , 即  $\alpha \sim \beta$ .

### 习题 1.9

1. 研究下列函数的连续性:

$$(1) f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x, & 1 < x \leq 2; \end{cases} \quad (2) f(x) = \begin{cases} x, & -1 \leq x \leq 1, \\ 1, & x < -1, x > 1. \end{cases}$$

解 (1)  $f(x)$  在  $[0, 1]$  与  $(1, 2]$  上连续. 又  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2-x) = 1$ , 故  $f(x)$  在  $x=1$  处连续. 从而  $f(x)$  在  $[0, 2]$  上连续.

(2)  $f(x)$  在  $(-\infty, -1)$ ,  $[-1, 1]$ ,  $(1, +\infty)$  上连续. 又  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 = 1$ , 故  $f(x)$  在  $x=1$  处连续;  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} 1 = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} x = -1$ , 故  $f(x)$  在  $x=-1$  处不连续. 即  $f(x)$  在  $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$  上连续.

2. 常数  $C$  为何值时, 可使函数  $f(x) = \begin{cases} Cx+1, & x \leq 3, \\ Cx^2-1, & x > 3 \end{cases}$  在  $(-\infty, +\infty)$  内连续.

解  $f(x)$  在  $(-\infty, 3)$ ,  $[3, +\infty)$  上连续. 在  $x=3$  处,  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (Cx+1) = 3C+1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (Cx^2-1) = 9C-1$ , 因  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续, 所以  $3C+1 = 9C-1$ , 即  $C = \frac{1}{3}$ .

3. 设函数  $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0, \\ a+x, & x \geq 0, \end{cases}$  应当怎样选择数  $a$ , 使  $f(x)$  成为在  $(-\infty, +\infty)$  上连续的函数?

解 要使函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续, 则函数  $f(x)$  必在  $x=0$  处连续. 故  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1 = f(0) = a$ . 因此, 当  $a=1$  时, 函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续.

4. 设  $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+2x)}{x}, & x \neq 0, \\ k, & x = 0, \end{cases}$  求  $k$  值使得  $f(x)$  在点  $x=0$  处连续.

解 因为  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x} = 2$ . 所以当  $k = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$  时,  $f(x)$  在点  $x=0$  处连续.

5. 问  $a$  取何值时,  $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x < 0, \\ a+x, & x \geq 0 \end{cases}$  在  $x=0$  处连续.

解 因为  $f(0) = a$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \cos x = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (a+x) = a$ . 要使  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ , 必须  $a=1$ . 故当且仅当  $a=1$  时, 函数  $f(x)$  在  $x=0$  处连续.

6. 讨论  $f(x) = \begin{cases} x+2, & x \geq 0, \\ x-2, & x < 0 \end{cases}$  在  $x=0$  处的连续性.

解 因为  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+2) = 2 = f(0)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x-2) = -2 \neq f(0)$ , 右连续, 但不左连续, 故函数  $f(x)$  在点  $x=0$  处不连续.

7. 指出下列函数的间断点及其所属类型, 若是可去间断点, 试补充或修改定义, 使函数在该点连续.

$$(1) y = \frac{x^2 - x}{|x|(x^2 - 1)};$$

$$(2) y = \arctan \frac{1}{x-1};$$

$$(3) y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2};$$

$$(4) y = \frac{x}{\tan x};$$

$$(5) y = \cos^2 \frac{1}{x}, x \neq 0;$$

$$(6) f(x) = \begin{cases} 1/x, & x < 0, \\ \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & x < |x - 1| \leq 1, \\ x + 1, & x > 2. \end{cases}$$



解 (1) 函数无定义的点为  $x=0, x=\pm 1$ . 因为  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2-x}{|x|(x^2-1)} = 1, \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2-x}{|x|(x^2-1)} = -1$ , 所以  $x=0$  为第一类跳跃间断点.

又因为  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-x}{x(x^2-1)} = \frac{1}{2}$ , 所以  $x=1$  为可去间断点, 补充定义  $y(1) = \frac{1}{2}$ , 则函数在  $x=1$  处连续. 而  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-x}{|x|(x^2-1)} = \infty$ , 故  $x=-1$  为第二类无穷间断点.

(2) 函数无定义的点为  $x=1$ .  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \arctan \frac{1}{x-1} = \frac{\pi}{2}, \lim_{x \rightarrow 1^-} \arctan \frac{1}{x-1} = -\frac{\pi}{2}$ , 所以  $x=1$  为第一类跳跃间断点.

(3)  $x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$ , 故函数无定义的点为  $x=1, x=2$ . 因为  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^2-3x+2} = -2$ , 故  $x=1$  为可去间断点, 补充  $y(1)=-2$ , 则函数在  $x=1$  处连续. 又  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-1}{x^2-3x+2} = \infty$ , 所以  $x=2$  为无穷间断点.

(4) 函数无定义的点为  $x=k\pi, x=k\pi+\frac{\pi}{2}, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . 当  $k=0$  时,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = 1$ , 故  $x=0$  为可去间断点, 补充  $y(0)=1$ , 则函数在  $x=0$  处连续;

当  $k \neq 0$  时,  $\lim_{x \rightarrow k\pi} \frac{x}{\tan x} = \infty$ , 故  $x=k\pi$  是无穷间断点;

$\lim_{x \rightarrow k\pi+\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan x} = 0$ , 故  $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$  是可去间断点, 补充  $y(k\pi+\frac{\pi}{2})=0$ , 则函数在  $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$  处连续.

(5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos^2 \frac{1}{x}$  不存在, 故  $x=0$  是函数的第二类间断点.

(6)  $f(x)$  的定义域为  $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ , 且在  $(-\infty, 1), (0, 1), (1, 2), (2, +\infty)$  中  $f(x)$  都是初等函数, 因而  $f(x)$  的间断点只可能在  $x_1=0, x_2=1, x_3=2$  处.

由于  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = \infty$ , 因此  $x_1=0$  是  $f(x)$  的第二类间断点(无穷间断点);

由于  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$ , 且  $f(x)$  在  $x_2=1$  处无定义, 因此  $x_2=1$  是  $f(x)$  的可去间断点;

由于  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2-1}{x-1} = 3, \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x+1) = 3, f(2)=3$ , 因此  $x_3=2$  是  $f(x)$  的连续点.

8. 设  $f(x)$  在点  $x_0$  连续,  $g(x)$  在点  $x_0$  不连续, 问  $f(x)+g(x)$  及  $f(x) \cdot g(x)$  在点  $x_0$  是否连续? 若肯定或否定, 请给出证明; 若不确定试给出例子(连续的例子与不连续的例子).

解  $f(x)+g(x)$  在点  $x_0$  肯定不连续, 证明如下: 若  $f(x)+g(x)$  在  $x_0$  连续, 因为  $f(x)$  在点  $x_0$  连续, 故  $g(x)=[f(x)+g(x)]-f(x)$  在点  $x_0$  也连续, 此与题设矛盾.

$f(x) \cdot g(x)$  在  $x_0$  的连续性不能确定. 例如: 若  $f(x) \equiv 1, g(x)$  为任一在  $x_0$  不连续的函数, 则

$f(x) \cdot g(x)$  在  $x_0$  不连续. 又例: 若  $f(x) = x, g(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$   $x_0 = 0$ , 则  $f(x), g(x)$  满足题目要求,

但  $f(x) \cdot g(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$  在  $x_0=0$  处连续.

9. 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x});$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \tan \left( \ln \frac{4x^2+1}{x^2+4x} \right);$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{3}{\sin x}};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x}{2x+1}.$$

解 (1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2} \sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2}.$

又因为  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} = \sin \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} \right) = \sin \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} \right) = 0$ , 而

$$\left| \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2} \right| \leq 1, \quad \text{故 } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}) = 0.$$

(2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \tan \left( \ln \frac{4x^2+1}{x^2+4x} \right) = \tan \left[ \ln \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2+1}{x^2+4x} \right) \right] = \tan(2\ln 2).$

(3) 因为  $(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}} = (1+2x)^{\frac{1}{2x} \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot 6}$ , 所以  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{3}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} [(1+2x)^{\frac{1}{2x}}]^{\frac{x}{\sin x} \cdot 6} = e^6.$

(4) 因为  $f(x) = \frac{e^x}{2x+1}$  是初等函数, 且  $x_0 = 2$  是其定义区间内的点, 所以  $f(x) = \frac{e^x}{2x+1}$  在点  $x_0 = 2$  处

连续, 于是  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x}{2x+1} = \frac{e^2}{2 \times 2 + 1} = \frac{e^2}{5}.$

### 提高题

1. 设  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} + ax^2 + bx}{x^{2n} + 1}$  为连续函数, 试确定  $a$  与  $b$  的值.

解 首先求出  $f(x)$ . 注意到  $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = \begin{cases} \infty, & |x| > 1, \\ 1, & |x| = 1, \\ 0, & |x| < 1, \end{cases}$  即应分段求出  $f(x)$ .

当  $|x| > 1$  时,  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{-1} + ax^{2-2n} + bx^{1-2n}}{x^{-2n} + 1} = \frac{1}{x};$

当  $|x| < 1$  时,  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + bx}{1} = ax^2 + bx$ . 于是得

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & |x| > 1, \\ \frac{1}{2}(a+b+1), & x = 1, \\ \frac{1}{2}(a-b-1), & x = -1, \\ ax^2 + bx, & |x| < 1. \end{cases}$$

其次, 由初等函数的连续性, 当  $|x| > 1, |x| < 1$  时  $f(x)$  分别为初等函数, 故连续.

最后, 考察分段函数的连接点  $x = \pm 1$  处的连续性. 根据定义, 分别计算

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax^2 + bx) = a + b;$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (ax^2 + bx) = a - b, \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x} = -1;$$

$$\begin{aligned} f(x) \text{ 在 } x=1 \text{ 连续} &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow a+b=1 = \frac{1}{2}(a+b+1) \\ &\Leftrightarrow a+b=1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) \text{ 在 } x=-1 \text{ 连续} &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = f(-1) \Leftrightarrow a-b=-1 = \frac{1}{2}(a-b-1) \\ &\Leftrightarrow a-b=-1. \end{aligned}$$

因此  $f(x)$  在  $x = \pm 1$  均连续  $\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1, \\ a-b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow a=0, b=1$ . 故仅当  $a=0, b=1$  时  $f(x)$  处处连续.



2. 函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+ax^3)}{x - \arcsin x}, & x < 0, \\ 6, & x = 0, \\ \frac{e^{ax} + x^2 - ax - 1}{x \sin \frac{x}{4}}, & x > 0, \end{cases}$  问  $a$  为何值时,  $f(x)$  在:

(1)  $x=0$  处连续; (2)  $x=0$  为可去间断点; (3)  $x=0$  为跳跃间断点.

解  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1+ax^3)}{x - \arcsin x} = -6a$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{ax} + x^2 - ax - 1}{x \sin \frac{x}{4}} = 2a^2 + 4$ .

令  $-6a = 2a^2 + 4$ , 得  $a = -1$  或  $a = -2$ .

当  $a = -1$  时,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 6$ , 故  $f(x)$  在  $x=0$  处连续.

当  $a = -2$  时,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 12 \neq f(0) = 6$ , 故  $f(x)$  在  $x=0$  处为可去间断点.

当  $a \neq -1$  且  $a \neq -2$  时,  $f(x)$  在  $x=0$  处为跳跃间断点.

3. 讨论函数  $f(x) = x \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}$  的连续性, 若有间断点, 判别其类型.

解  $f(x) = x \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}} = \begin{cases} x, & |x| < 1, \\ 0, & |x| = 1, \\ -x, & |x| > 1. \end{cases}$

因为  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-x) = -1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1$ , 所以  $x=1$  为函数的跳跃间断点;

因为  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} x = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (-x) = -1$ , 所以  $x=-1$  为函数的跳跃间断点.

4. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0, \\ \frac{1}{n}, & \frac{1}{n+1} \leq x \leq \frac{1}{n}, \end{cases}$  判断  $x=0$  是  $f(x)$  的连续点还是间断点.

解  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ ,  $f(0) = 0$ , 即  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ , 故  $f(x)$  在  $x=0$  处连续.

5. 设  $f(x)$  在点  $x_0$  连续, 且  $f(x_0) \neq 0$ , 试证存在  $\delta > 0$ , 使得当  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  时  $|f(x)| > \frac{|f(x_0)|}{2}$ .

证明 取  $\epsilon = \frac{|f(x_0)|}{2} > 0$ . 因  $f(x)$  在点  $x_0$  连续, 故存在  $\delta > 0$ , 使  $|x - x_0| < \delta$ , 即  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  时,

$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon = \frac{|f(x_0)|}{2}$ , 即  $f(x_0) - \frac{|f(x_0)|}{2} < f(x) < f(x_0) + \frac{|f(x_0)|}{2}$ , 于是:

(1) 若  $f(x_0) > 0$ , 则  $f(x) > f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} = \frac{f(x_0)}{2}$ .

(2) 若  $f(x_0) < 0$ , 则  $f(x) < -|f(x_0)| + \frac{|f(x_0)|}{2} = -\frac{|f(x_0)|}{2}$ , 即  $|f(x)| > \frac{|f(x_0)|}{2}$ .

6. 设  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{1-ax}-1}{x}, & x < 0, \\ ax+b, & 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{\sin(x-1)}{x-1}, & x > 1, \end{cases}$  为连续函数, 求常数  $a, b$ .

解  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt[3]{1-ax}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{3} \frac{-ax}{x} = -\frac{1}{3}a$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax+b) = b$ ,  $f(0) = b$ .

因为  $f(x)$  在  $x=0$  处连续, 所以  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ , 即  $b = -\frac{1}{3}a$ .

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (ax+b) = b+a, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sin(x-1)}{x-1} = 1, \quad f(1) = b+a.$$

因为  $f(x)$  在  $x=1$  处连续, 所以  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$ , 即  $b+a=1$ . 又  $b = -\frac{1}{3}a$ , 得  $a = \frac{3}{2}, b = \frac{1}{2}$ .

7. 设函数  $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & |x| \leq c, \\ \frac{2}{|x|}, & |x| > c \end{cases}$  在  $(-\infty, +\infty)$  内连续, 求  $c$ .

$$\text{解 } f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x}, & x < -c, \\ x^2+1, & -c \leq x \leq c, \\ \frac{2}{x}, & x > c. \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} \left(-\frac{2}{x}\right) = -\frac{2}{c}, \quad \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^-} (x^2+1) = c^2+1, \quad f(-c) = f(c) = c^2+1.$$

因为  $f(x)$  在  $x=c$  处连续, 所以  $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = f(c)$ , 即有  $c^2+1 = -\frac{2}{c}$ , 解得  $c=1$ .

### 习题 1.10

1. 证明方程  $x^3+2x=6$  至少有一个根介于 1 和 3 之间.

**证明** 设  $f(x) = x^3+2x-6$ , 则  $f(x)$  在  $[1, 3]$  上连续, 且  $f(1) = -3 < 0, f(3) = 9 > 0$ , 由零点定理, 在  $(1, 3)$  内至少有一点  $\xi$ , 使  $f(\xi) = 0$ , 即方程  $x^3+2x=6$  在  $(1, 3)$  内至少有一根.

2. 证明方程  $x = a \sin x + b (a > 0, b > 0)$  至少有一个正根, 并且它不超过  $a+b$ .

**证明** 设  $f(x) = a \sin x + b - x$ , 则  $f(x)$  在  $[0, a+b]$  上连续, 且

$$f(0) = b > 0, \quad f(a+b) = a \sin(a+b) - a = a[\sin(a+b) - 1] \leq 0.$$

若  $f(a+b) = 0$ , 则  $a+b$  是方程  $x = a \sin x + b$  的根;

若  $f(a+b) < 0$ , 由零点定理, 在  $(0, a+b)$  内至少有一点  $\xi$ , 使  $f(\xi) = 0$ , 即  $\xi$  是方程  $x = a \sin x + b$  的根. 故方程  $x = a \sin x + b$  至少有一个不超过  $a+b$  的正根.

3. 证明方程  $xe^{x^2} = 1$  在区间  $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$  内有且仅有一个实根.

**证明** 设  $F(x) = xe^{x^2} - 1$ , 则  $F(x)$  在  $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$  上连续. 又

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{4}} - 1 = \frac{1}{2}(e^{\frac{1}{4}} - 2) = \frac{1}{2}(\sqrt[4]{e} - 2) < \frac{1}{2}(\sqrt[4]{4} - 2) = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 2) < 0, \\ F(1) = e - 1 > 0.$$

由零点存在定理,  $F(x) = 0$  在  $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$  内至少有一个实根.

因  $F'(x) = e^{x^2}(1+2x^2) > 0$ , 故  $F(x) = xe^{x^2} - 1$  在  $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$  单调增加, 从而  $F(x) = 0$  在  $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$  至多有一个实根, 故  $xe^{x^2} = 1$  在区间  $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$  有且仅有一个实根.

4. 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 且  $0 \leq f(x) \leq 1$ , 证明在  $[0, 1]$  上至少存在一点  $\xi$ , 使得  $f(\xi) = \xi$ .

**证明** 设  $F(x) = x - f(x)$ , 则由题设  $F(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 且  $F(0) = -f(0) \leq 0, F(1) = 1 - f(1) \geq 0$ .

若  $F(0) = 0$  或  $F(1) = 0$ , 则可取  $\xi = 0$  或  $\xi = 1$  结论成立; 否则  $F(0) < 0, F(1) > 0$ , 由连续函数的零点定理, 存在  $\xi \in (0, 1)$  使得  $F(\xi) = 0$ , 即  $f(\xi) = \xi$ .



5. 设函数  $f(x)$  在  $[0, 2a]$  上连续, 且  $f(0) = f(2a)$ , 证明在  $[0, a]$  上至少存在一点  $\xi$ , 使得  $f(\xi) = f(\xi+a)$ .

**证明** 设  $F(x) = f(x) - f(x+a)$ , 则  $F(x)$  在  $[0, a]$  上连续且  $F(0) = f(0) - f(a) = f(2a) - f(a) = F(a) = f(a) - f(2a) = -F(0)$ . 若  $F(0) = 0$ , 则  $\xi = 0$  即为所求; 若  $F(0) \neq 0$ , 则  $F(0)F(a) = -F^2(0) < 0$ , 故由零点定理, 存在  $\xi \in (0, a)$  使  $F(\xi) = 0$ , 即  $f(\xi) = f(\xi+a)$ .

6. 若  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续,  $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$ , 则在  $[x_1, x_n]$  上必有  $\xi$ , 使

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

**证明** 因为  $f(x)$  在  $[x_1, x_n] \subset [a, b]$  上连续, 所以  $f(x)$  在  $[x_1, x_n]$  上有最大值  $M$  和最小值  $m$ , 则  $m < f(x_i) < M (i=1, 2, \cdots, n)$ , 从而  $m < \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} < M$ , 由介值定理, 至少存在一点  $\xi$ , 使

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

### 提高题

1. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续且无零点, 证明: 存在  $m > 0$ , 使得或者在  $[a, b]$  上恒有  $f(x) \geq m$ , 或者在  $[a, b]$  上恒有  $f(x) \leq -m$ .

**证明** 若有  $x_0 \in [a, b]$ , 使  $f(x_0) > 0$ , 由闭区间上连续函数的最值定理, 设  $f(x)$  在  $x_1 \in [a, b]$  取最小值  $m$ , 则可断定  $m > 0$ , 从而  $f(x) \geq m, x \in [a, b]$ . 若不然, 则  $m < 0$ , 由连续函数介值定理, 在  $x_0$  与  $x_1$  之间必有一点  $\xi$ , 使  $f(\xi) = 0$ . 此与  $f(x)$  无零点矛盾.

同法可证, 若有  $x_0 \in [a, b]$ , 使  $f(x_0) < 0$ , 则存在  $m > 0$ , 使  $f(x) < -m, x \in [a, b]$  ( $-m$  为  $f(x)$  在  $[a, b]$  上最大值), 则  $-m < 0$ , 从而  $m > 0$ .

2. 若  $f(x)$  在  $[a, b)$  上连续, 且  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$  存在, 证明  $f(x)$  在  $[a, b)$  上有界.

**证明** 设  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = A$ , 取  $\varepsilon = 1$ , 由极限定义, 存在  $0 < \delta < b - a$ , 使当  $0 < b - x < \delta$ , 即  $x \in (b - \delta, b)$  时,  $|f(x) - A| < \varepsilon = 1$ , 从而  $|f(x)| = |f(x) - A + A| \leq |f(x) - A| + |A| < 1 + |A|$ .

又因  $f(x)$  在闭区间  $[a, b - \delta]$  上连续, 从而有界, 设在  $[a, b - \delta]$  上,  $|f(x)| \leq M$ , 记  $N = \max\{M, |A| + 1\}$ , 则当  $x \in [a, b)$  时, 恒有  $|f(x)| \leq N$ .

3. 设  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上连续,  $f(a) > 0$ , 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A < 0$ , 证明: 在  $[a, +\infty)$  上至少有一点  $\xi$ , 使  $f(\xi) = 0$ .

**证明** 只要能找到一点  $x_1 > a$ , 使  $f(x_1) < 0$  便可对  $f(x)$  在  $[a, x_1]$  上应用零点定理, 得到所需的结论.

因  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A < 0$ , 故对  $\varepsilon_0 = \frac{|A|}{2} > 0$ , 存在  $X_0 > 0$ , 当  $x > X_0$  时, 有  $|f(x) - A| < \varepsilon_0$ , 即  $-\frac{|A|}{2} + A < f(x) < \frac{|A|}{2} + A = \frac{A}{2} < 0$ . 取实数  $x_1 > X_0$ , 这样  $f(a) > 0$ , 而  $f(x_1) < 0$ . 由零点定理知: 在  $(a, +\infty)$  内至少有一点  $\xi$ , 使  $f(\xi) = 0$ . 由于  $(a, x_1) \subset (a, +\infty)$ , 也就是说在  $(a, +\infty)$  内至少有一点  $\xi$ , 使  $f(\xi) = 0$ .

4. 证明方程  $x^5 - 3x = 1$  在  $(1, 2)$  内至少存在一个实根.

**证明** 设  $f(x) = x^5 - 3x - 1$ , 则  $f(x)$  在  $[1, 2]$  上连续, 且  $f(1) = -3, f(2) = 25$ , 由零点定理, 在  $(1, 2)$  内至少有一点  $\xi$ , 使  $f(\xi) = 0$ . 即方程  $x^5 - 3x = 1$  在  $(1, 2)$  内至少有一根.

5. 证明曲线  $y = x^4 - 3x^2 + 7x + 10$  在  $x = 1$  与  $x = 2$  之间至少与  $x$  轴有一个交点.

**证明** 设  $f(x) = x^4 - 3x^2 + 7x + 10$ , 则  $f(x)$  在  $[1, 2]$  上连续, 且  $f(1) = 9, f(2) = -4$ , 由零点定理, 在  $(1, 2)$  内至少有一点  $\xi$ , 使  $f(\xi) = 0$ . 即方程  $x^4 - 3x^2 + 7x + 10 = 0$  在  $(1, 2)$  内至少有一根, 即曲线  $y = x^4 - 3x^2 + 7x + 10$  在  $x = 1$  与  $x = 2$  之间至少与  $x$  轴有一个交点.

6. 证明在  $(0, 2)$  内至少存在一点  $x_0$ , 使得  $e^{x_0} = 2 - x_0$ .

**证明** 设  $f(x) = e^x - x - 2$ , 则  $f(x)$  在  $[0, 2]$  上连续, 且  $f(0) = -1 < 0, f(2) = e^2 - 4 > 0$ . 由零点存在

定理知在  $(0, 2)$  内至少存在一点  $x_0$ , 使得  $e^{x_0} = 2 - x_0$ .

### 复习题 1 解答

#### 1. 是非题

- (1) 无界数列必定发散; ( )  
 (2) 分段函数必存在间断点; ( )  
 (3) 初等函数在其定义域内必连续; ( )  
 (4) 若  $f(x)$  在  $x_0$  连续, 则必有  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x)$ ; ( )  
 (5) 若对任意给定的  $\varepsilon > 0$ , 存在自然数  $N$ , 当  $n > N$  时, 总有无穷多个  $u_n$  满足  $|u_n - A| < \varepsilon$ , 则数列  $\{u_n\}$  必以  $A$  为极限. ( )

答案 (1)  $\checkmark$ ; (2)  $\times$ ; (3)  $\times$ ; (4)  $\checkmark$ ; (5)  $\times$ .

#### 2. 填空题

(1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) \sqrt{n-1} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(2) 已知  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left( 1 + \frac{f(x)}{\sin 2x} \right)}{3^x - 1} = 5$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(3)  $\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^{2x})^{\frac{1}{\sin x}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(4) 函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x} - 1}{x}, & x < 0, \\ a \cos x + x^2, & x \geq 0 \end{cases}$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续则  $a = \underline{\hspace{2cm}}.$

(5) 已知  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x - 1} = 3$ , 则  $a = \underline{\hspace{2cm}}, b = \underline{\hspace{2cm}}.$

解 (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) \sqrt{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n}) \sqrt{n-1}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}$   
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2-n) \sqrt{n-1}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} \quad (\text{抓大头})$   
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{n}}{2\sqrt{n}} = 1.$

(2) 因为  $x \rightarrow 0$  时分母趋于 0, 而整个分式的极限存在, 所以分子也趋于 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left( 1 + \frac{f(x)}{\sin 2x} \right)}{3^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)}{\sin 2x}}{x \ln 3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x \cdot x \ln 3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} \cdot \frac{1}{2 \ln 3} = 5,$$

故  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 10 \ln 3.$

(3) 本题属于  $1^\infty$  型, 故  $\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^{2x})^{\frac{1}{\sin x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + e^{2x} - 1}{\sin x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 2x}{x}} = e^3.$

(注: 因为  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} \neq -1$ , 所以  $x + e^{2x} - 1 \sim x + 2x = 3x$ .)

(4)  $f(x)$  在  $x=0$  处连续, 则  $f(0-0) = f(0) = f(0+0)$ , 而

$$f(0-0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x}{x} = 2, \quad f(0+0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (a \cos x + x^2) = a,$$

则  $a = 2$ .

(5) 因为  $x \rightarrow 1$  时分母趋于零, 而整个分式的极限存在, 所以分子也趋于零.

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + ax + b) = 1 + a + b = 0, \quad \text{即} \quad a = -1 - b.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + (-1 - b)x + b}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x - b)}{x - 1} = 1 - b = 3,$$



则  $b = 2, a = 1$ .

### 3. 选择题

(1) 设  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上有定义, 函数  $f(x)$  在点  $x_0$  左、右极限都存在且相等是函数  $f(x)$  在点  $x_0$  连续的( ).

- A. 充分条件  
B. 充分且必要条件  
C. 必要条件  
D. 非充分也非必要条件

(2) 若函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 + a, & x \geq 1, \\ \cos \pi x, & x < 1 \end{cases}$  在  $\mathbf{R}$  上连续, 则  $a$  的值为( ).

- A. 0  
B. 1  
C. -1  
D. -2

(3) 若函数  $f(x)$  在某点  $x_0$  极限存在, 则( ).

- A.  $f(x)$  在  $x_0$  的函数值必存在且等于极限值  
B.  $f(x)$  在  $x_0$  函数值必存在, 但不一定等于极限值  
C.  $f(x)$  在  $x_0$  的函数值可以不存在  
D. 如果  $f(x_0)$  存在的话, 必等于极限值

(4)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = ( )$ .

- A.  $\infty$   
B. 不存在  
C. 1  
D. 0

(5)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{2x} = ( )$ .

- A.  $e^{-2}$   
B.  $\infty$   
C. 0  
D.  $\frac{1}{2}$

解 (1) C; (2) D; (3) C; (4) C; (5) A.

### 4. 利用极限定义证明:

(1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2n-1} = \frac{3}{2}$ ; (2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} 0 \cdot \underbrace{99 \cdots 9}_{n \uparrow} = 1$ .

证明 (1)  $\forall \varepsilon > 0$ , 要使  $\left| \frac{3n+1}{2n-1} - \frac{3}{2} \right| = \left| \frac{5}{2(2n-1)} \right| < \frac{5}{A} < \varepsilon$ , 只要  $n > \frac{5}{\varepsilon}$ , 取  $N = \left[ \frac{5}{\varepsilon} \right]$ , 则当  $n > N$  时,

恒有  $\left| \frac{3n+1}{2n-1} - \frac{3}{2} \right| < \varepsilon$ , 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2n-1} = \frac{3}{2}$ .

(2)  $\forall \varepsilon > 0$ , 因  $0 \cdot \underbrace{999 \cdots 9}_n = \left| 1 - \frac{1}{10^n} \right|$ , 要使  $|0 \cdot \underbrace{999 \cdots 9}_{n \uparrow}| < \varepsilon$ , 只要  $\frac{1}{10^n} < \varepsilon$ , 即只要  $n > \log_{10} \frac{1}{\varepsilon}$ . 取  $N =$

$\left[ \log_{10} \frac{1}{\varepsilon} \right]$ , 则当  $n > N$  时, 恒有  $|0 \cdot \underbrace{999 \cdots 9}_{n \uparrow}| < \varepsilon$ , 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} 0 \cdot \underbrace{999 \cdots 9}_{n \uparrow} = 1$ .

### 5. 求下列极限:

(1)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1 + \sqrt[3]{x-1})}{\arcsin 2 \sqrt[3]{x^2-1}}$ ;

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ln n} (\sqrt[n]{n} - 1)$ ;

(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2+n+1} + \frac{2}{n^2+n+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n+n} \right)$ ;

(4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+3\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}})$ ;

(5)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{3}{1^2 \times 2^2} + \frac{5}{2^2 \times 3^2} + \cdots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \right]$ .

解 (1) 当  $x \rightarrow 1$  时,  $\ln(1 + \sqrt[3]{x-1}) \sim \sqrt[3]{x-1}$ ,  $\arcsin 2 \sqrt[3]{x^2-1} \sim 2 \sqrt[3]{x^2-1}$ .

由等价无穷小代换, 得  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1 + \sqrt[3]{x-1})}{\arcsin 2 \sqrt[3]{x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x-1}}{2 \sqrt[3]{x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2 \sqrt[3]{x+1}} = \frac{1}{2 \sqrt[3]{2}}$ .

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ln n} (\sqrt[n]{n} - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n} - 1}{\ln \sqrt[n]{n}} \xrightarrow{\text{令 } \sqrt[n]{n} - 1 = x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(1+x)} = 1$ .

(3)  $\frac{1}{n^2+n+n} + \frac{2}{n^2+n+n} + \cdots + \frac{n}{n^2+n+n} < \frac{1}{n^2+n+1} + \frac{2}{n^2+n+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n+n}$

$$< \frac{1}{n^2+n+1} + \frac{2}{n^2+n+1} + \cdots + \frac{n}{n^2+n+1},$$

所以  $\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n} < \frac{1}{n^2+n+1} + \frac{2}{n^2+n+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n+n} < \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}.$

因为  $\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n} = \frac{\frac{n(1+n)}{2}}{n^2+n+n} \rightarrow \frac{1}{2} \quad (n \rightarrow \infty), \quad \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1} = \frac{\frac{n(1+n)}{2}}{n^2+n+1} \rightarrow \frac{1}{2} \quad (n \rightarrow \infty),$  所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2+n+1} + \frac{2}{n^2+n+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n+n} \right) = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} (4) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+3\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+3\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}})(\sqrt{n+3\sqrt{n}} + \sqrt{n-\sqrt{n}})}{\sqrt{n+3\sqrt{n}} + \sqrt{n-\sqrt{n}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3\sqrt{n}-n+\sqrt{n}}{\sqrt{n+3\sqrt{n}} + \sqrt{n-\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+3\sqrt{n}} + \sqrt{n-\sqrt{n}}} = 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{3}{1^2 \times 2^2} + \frac{5}{2^2 \times 3^2} + \cdots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right] = 1. \end{aligned}$$

6. 设  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^{95}(ax+1)^5}{(x^2+1)^{50}} = 8$ , 求  $a$  的值.

解 因为  $8 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^{95}(ax+1)^5}{(x^2+1)^{50}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{95}(ax)^5}{(x^2)^{50}} = a^5$ , 所以  $a = \sqrt[5]{8}$ .

7. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x < 0, \\ 2x-b, & x \geq 0 \end{cases}$  在点  $x=0$  处连续, 求  $b$  的值.

解  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2+1) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x-b) = -b.$

因为  $f(x)$  在点  $x=0$  处连续, 则  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ , 即  $b = -1$ .

8. 求下列函数的间断点, 并判断其类型. 若为可去间断点, 试补充或修改定义后使其为连续点.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x}{|x|(x^2-1)}, & x \neq \pm 1 \text{ 及 } 0, \\ 0, & x = \pm 1. \end{cases}$$

解 因为  $f(x)$  在  $x=0$  处无定义, 所以  $x=0$  是  $f(x)$  的间断点.

又因  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2+x}{-x(x^2-1)} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2+x}{x(x^2-1)} = -1.$

所以  $x=0$  为  $f(x)$  的第一类间断点(跳跃间断点).

$f(x)$  在  $x=\pm 1$  处有定义, 但是  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x}{|x|(x^2-1)} = \infty$ , 所以  $x=1$  为  $f(x)$  的无穷间断点.

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x+1)}{-x(x+1)(x-1)} = \frac{1}{2}$ , 所以  $x=-1$  为  $f(x)$  的可去间断点.

9. 求下列函数的间断点并判别类型:

(1)  $f(x) = \frac{x}{(1+x)^2}$ ; (2)  $f(x) = \frac{|x|}{x}$ ; (3)  $f(x) = [x]$ ; (4)  $f(x) = \frac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{2^{\frac{1}{x}} + 1}.$

解 (1) 当  $x \rightarrow -1$  为第二类间断点(无穷间断点).

(2)  $x=0$ , 为第一类间断点(跳跃间断点).

(3)  $x=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , 均为第一类间断点(跳跃间断点).

(4)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{2^{\frac{1}{x}} + 1} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} 2^{\frac{1}{x}} = +\infty,$



$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{2^{\frac{1}{x}} + 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1} = -1 \quad \left( \lim_{x \rightarrow 0} 2^{\frac{1}{x}} = 0 \right),$$

所以  $x=0$  为第一类(跳跃)间断点.

$$10. \text{ 设 } a > 0, f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x}{x+2}, & x \geq 0, \\ \frac{\sqrt{a} - \sqrt{a-x}}{x}, & x < 0. \end{cases}$$

(1)  $a$  为何值时,  $x=0$  是  $f(x)$  的连续点? (2)  $a$  为何值时,  $x=0$  是  $f(x)$  的间断点?

(3) 当  $a=2$  时求连续区间.

解 (1)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = \frac{1}{2}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{a} - \sqrt{a-x}}{x} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$ , 要  $f(x)$  在  $x=0$  连续, 则  $\frac{1}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{2}$ , 所以  $a=1$ .

(2) 由(1)可知,  $a > 0$  且  $a \neq 1$  时  $x=0$  是  $f(x)$  的间断点.

(3) 当  $a=2$  时,  $f(x)$  在  $x=0$  间断, 但右连续而不左连续, 故  $f(x)$  的连续区间为  $(-\infty, 0)$  及  $[0, +\infty)$ .

$$11. \text{ 设 } f(x) = \begin{cases} 2, & x=0, x=\pm 2, \\ 4-x^2, & 0 < |x| < 2, \\ 4, & |x| > 2, \end{cases} \text{ 求出 } f(x) \text{ 的间断点, 并指出是哪一类间断点, 若可去, 则补充}$$

定义, 使其在该点连续.

解 (1) 由  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 4$ ,  $f(0) = 2$ , 故  $x=0$  为可去间断点, 改变  $f(x)$  在  $x=0$  的定义为  $f(0) = 4$ , 即可使  $f(x)$  在  $x=0$  连续.

(2) 由  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0$ , 故  $x=2$  为第一类间断点.

(3) 类似地, 易得  $x=-2$  为第一类间断点.

$$12. \text{ 讨论函数 } f(x) = \begin{cases} x^a \sin \frac{1}{x}, & x > 0, \\ e^x + \beta, & x \leq 0 \end{cases} \text{ 在 } x=0 \text{ 处的连续性.}$$

解 当  $a \leq 0$  时,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( x^a \sin \frac{1}{x} \right)$  不存在, 所以  $x=0$  为第二类间断点;

当  $a > 0$  时,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( x^a \sin \frac{1}{x} \right) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x + \beta) = 1 + \beta$ , 所以  $\beta = -1$  时, 在  $x=0$  连续; 当  $\beta \neq -1$  时,  $x=0$  为第一类跳跃间断点.

13. 若  $f(x)$  在  $[0, a]$  上连续 ( $a > 0$ ) 且  $f(0) \neq f(a)$ , 证明方程  $f(x) = f\left(x + \frac{a}{2}\right)$  在  $(0, a)$  内至少有一个实根.

证明 令  $F(x) = f(x) - f\left(x + \frac{a}{2}\right)$ , 在  $\left[0, \frac{a}{2}\right]$  上用零点定理.

14. 验证方程  $x2^x = 1$  至少有一个小于 1 的根.

证明 设  $f(x) = x2^x - 1$ , 易知  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 且  $f(0) = -1 < 0$ ,  $f(1) = 1 > 0$ , 故  $\exists \xi \in (0, 1)$ , 使  $f(\xi) = 0$ .

15. 证明: 若  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内连续, 且  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  存在, 则  $f(x)$  必在  $(-\infty, +\infty)$  内有界.

证明 令  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ , 则对给定的一个  $\epsilon > 0$ ,  $\exists X > 0$ , 只要  $|x| > X$ , 就有  $|f(x) - A| < \epsilon$ , 即  $A - \epsilon < f(x) < A + \epsilon$ . 又由  $f(x)$  在闭区间  $[-X, X]$  上连续, 根据有界性条件,  $\exists M > 0$ , 使  $|f(x)| \leq M$ ,  $x \in [-X, X]$ , 取  $N = \max\{M, |A - \epsilon|, |A + \epsilon|\}$ , 则  $|f(x)| \leq N$ ,  $x \in (-\infty, +\infty)$ .

16. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且  $a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$ ,  $c_i (i = 1, 2, \dots, n)$  为任意正数, 则在  $(a, b)$  内至

少存在一个  $\xi$ , 使  $f(\xi) = \frac{c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + \cdots + c_n f(x_n)}{c_1 + c_2 + \cdots + c_n}$ .

证明 令  $M = \max_{1 \leq i \leq n} \{f(x_i)\}$ ,  $m = \min_{1 \leq i \leq n} \{f(x_i)\}$ , 则

$$\begin{aligned} m &\leq f(x_1) \leq M, & c_1 m &\leq c_1 f(x_1) \leq c_1 M, \\ m &\leq f(x_2) \leq M, & c_2 m &\leq c_2 f(x_2) \leq c_2 M, \\ &\vdots & & \vdots \\ m &\leq f(x_n) \leq M, & c_n m &\leq c_n f(x_n) \leq c_n M, \end{aligned}$$

所以  $m \leq \frac{c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + \cdots + c_n f(x_n)}{c_1 + c_2 + \cdots + c_n} \leq M$ , 由介值定理存在

$$\xi (a < x_1 \leq \xi \leq x_n < b), \text{ 使得 } f(\xi) = \frac{c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + \cdots + c_n f(x_n)}{c_1 + c_2 + \cdots + c_n}.$$

17. 设  $f(x), g(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且  $f(a) < g(a), f(b) > g(b)$ , 试证: 在  $(a, b)$  内至少存在一个  $\xi$ , 使  $f(\xi) = g(\xi)$ .

证明 假设  $F(x) = f(x) - g(x)$ , 则  $F(a) = f(a) - g(a) < 0, F(b) = f(b) - g(b) > 0$ , 于是由介值定理在  $(a, b)$  内至少存在一个  $\xi$ , 使  $f(\xi) - g(\xi) = 0$ , 即  $f(\xi) = g(\xi)$ .

### 自测题 1 答案

1. 解 (1) 本题属于  $1^\infty$ , 故  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+3}{2x+1} \right)^{x+1} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} (x+1) \left( \frac{2x+3}{2x+1} - 1 \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+2}{2x+1}} = e$ .

(2) 当  $x \rightarrow 0$  时,  $(1+kx^2)^{\frac{1}{2}} - 1 \sim \frac{1}{2}kx^2, \cos x - 1 \sim -\frac{1}{2}x^2$ , 故得  $\frac{1}{2}kx^2 = -\frac{1}{2}x^2$ , 即  $k = -1$ .

(3)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (a + e^{\frac{1}{x}}) = a, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin 3x}{x} = 3, f(0) = b + 1$ .

因为  $f(x)$  在  $x=0$  连续, 则  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ , 即  $a = 3 = b + 1$ , 故得  $a = 3, b = 2$ .

(4) 因  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(3x)} = 2$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(x)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3t}{f(3t)} = 3 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{f(3t)} = 6$ , 故

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\frac{x}{f(2x)}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

(5) 正.

2. 解 (1)  $x=1$  为  $f(x)$  的可去间断点, 意味着  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - b}{(x-a)(x-1)}$  存在.

又因为  $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0$ , 而  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - b}{(x-a)(x-1)}$  存在, 所以  $\lim_{x \rightarrow 1} (e^x - b) = e - b = 0 \Rightarrow b = e$ , 于是

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - b}{(x-a)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{(x-a)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e(e^{x-1} - 1)}{(x-a)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e(x-1)}{(x-a)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e}{x-a}.$$

若要  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e}{x-a}$  存在, 则  $a \neq 1$ . 所以, 当  $a \neq 1, b = e$  时,  $x=1$  为  $f(x)$  的可去间断点. 故选 C.

(2)  $f(x) = x \sin x$ , 故:

当  $x_k = k\pi$  时,  $f(x_k) = 0$ , 即  $k \rightarrow \infty$  时,  $f(x_k) = 0$ ;

当  $x_k = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$  时,  $f(x_k) = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ , 即  $k \rightarrow \infty$  时,  $f(x_k) \rightarrow \infty$ .

在  $x \rightarrow \infty$  的过程中,  $f(x)$  可以取到 0, 故不是无限增大, 但有部分值是无限增大, 因而  $f(x) = x \sin x$  在  $(-\infty, +\infty)$  内无界, 但不是无穷大. 故选 A.

(3)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x+1)(\sqrt[3]{x}-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{(x+1)(\sqrt[3]{x}-1)} = \frac{3}{2}$ , 所以  $f(x)$  与  $g(x)$  是同阶无穷

小, 但不等价. 故选 D.



$$(4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\pi}{2} - x}{x - \frac{\pi}{2}} = -1, \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\sin x} = 1,$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\tan x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ . 故选 A.

(5) 当  $x=0, x=-1, x=1$  时函数没有定义, 因此  $x=0, x=-1, x=1$  为  $f(x)$  的间断点

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-1)}{x(x-1)(x+1)} = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x-1)}{x(x-1)(x+1)} = -1.$$

因  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ , 故  $x=0$  为  $f(x)$  的跳跃间断点.

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x-1)}{x(x-1)(x+1)} = \infty$ , 故  $x=-1$  为  $f(x)$  的无穷间断点.

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)}{x(x-1)(x+1)} = \frac{1}{2}$ , 故  $x=1$  为  $f(x)$  的可去间断点. 故选 C.

$$3. \text{ 解 } (1) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} - x) \xrightarrow{\text{分子有理化}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1-2x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1-2x)^{\frac{1}{3}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}(-2x)} = e^{-2}.$$

(3) 令  $x=t+1$ , 则

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2-1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{(1+t)^2-1} \quad (\text{分子进行等价无穷小代换}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{t^2+2t} = \frac{1}{2}.$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x(e^x - 1)}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x x}{\sin x} = 1.$$

$$4. \text{ 解 } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (a+x^2) = a, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin \frac{1}{x} = 0, \quad f(0) = a.$$

因  $f(x)$  在  $x=0$  连续, 则  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ , 即有  $a=0$ .

$$5. \text{ 解 } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( x \sin \frac{1}{x} + e^{\frac{1}{x}} \right) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\sin x}{x} - 1 \right) = 0, \quad f(0) = k+1.$$

因为  $f(x)$  在  $x=0$  连续, 则  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ , 即  $0 = k+1 = 0$ , 故得  $k=-1$ .

$$6. \text{ 解 } (1) \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1+x}{(x+1)(x^2-x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x^2-x+1} = \frac{1}{3}, \text{ 故 } x=-1 \text{ 是 } f(x) \text{ 的可去间断点.}$$

(2) 函数在  $x=1$  和  $x=2$  处都没有定义.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0, \text{ 故 } x=1 \text{ 为跳跃间断点; } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \infty, \text{ 故 } x=2 \text{ 为无穷间断点.}$$

7. 解 令  $f(x) = x^3 + 4x^2 - 3x - 1$ , 则  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续. 又

$$f'(x) = 3x^2 + 8x - 3 = (3x-1)(x+3).$$

令  $f'(x) = 0$  得  $x = -3, x = \frac{1}{3}$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad f(-3) = 17 > 0, \quad f(0) = -1 < 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

则  $f(x) = 0$  在  $(-\infty, -3), (-3, 0), (0, +\infty)$  上各有一根, 故  $f(x) = 0$  在  $(-\infty, 0)$  内有两个实根.

## 2.1 大纲要求及重点内容

### 1. 大纲要求

- (1) 理解导数的概念及其几何意义,了解函数的可导性与连续性之间的关系.
- (2) 了解导数作为变化率的实际意义,会用导数表达实际应用中一些量的变化率.
- (3) 熟练掌握导数的四则运算法则和复合函数的求导法则,熟练掌握基本初等函数的导数公式.
- (4) 理解微分的概念,了解微分概念中所包含的局部线性化思想,了解微分的四则运算法则和一阶微分形式的不变性,会求函数的微分.
- (5) 了解高阶导数的概念,掌握初等函数一阶、二阶导数的求法.
- (6) 会求分段函数的导数,特别是利用定义求分段点处的导数.
- (7) 会求隐函数和由参数方程确定的函数的一阶、二阶导数,会求反函数的导数.

### 2. 重点内容

- (1) 利用导数的定义求函数的导数;
- (2) 根据导数的几何意义求曲线的切线与法线;
- (3) 高阶导数;
- (4) 复合函数求导;
- (5) 由隐函数及参数方程求高阶导数;
- (6) 求函数的微分.

## 2.2 内容精要

### 1. 基本概念

#### (1) 导数的极限定义

设函数  $y=f(x)$  在点  $x_0$  的某邻域  $U(x_0)$  内有定义,在点  $x_0$  自变量的增量是  $\Delta x$ ,相应的函数的增量是  $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ . 若极限  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$  存在,则称



函数  $f(x)$  在点  $x_0$  可导(或存在导数), 称此极限为函数  $f(x)$  在点  $x_0$  的导数(或微商), 记为

$f'(x_0)$  或  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}$ , 即

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \text{或} \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

有时为了方便也将极限改写为下列形式

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (\Delta x = h)$$

或

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (x = x_0 + \Delta x),$$

$$f'(x_0) = \lim_{\varphi(x) \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \varphi(x)) - f(x_0)}{\varphi(x)}.$$

**注** 导数是一个分式的极限, 分子是函数在两点的差值, 分母是自变量在两点的差值.

## (2) 左右导数

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{称为函数 } f(x) \text{ 在 } x_0 \text{ 的左导数,}$$

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{称为函数 } f(x) \text{ 在 } x_0 \text{ 的右导数.}$$

函数  $f(x)$  在  $x_0$  可导  $\Leftrightarrow$  函数  $f(x)$  在  $x_0$  的左、右导数都存在并且相等.

(3) 导数的几何意义  $f'(x_0)$  是曲线  $y = f(x)$  在对应点  $A(x_0, f(x_0))$  处的切线的斜率.

**导数的经济意义** 函数  $y = f(x)$  在  $x_0$  处的导数  $f'(x_0)$  是当自变量  $x$  在  $x_0$  基础上增加一个单位, 函数  $y = f(x)$  在  $f(x_0)$  基础上增加  $f'(x_0)$  个单位. 如利润函数  $R = R(x)$ , 当产量  $x$  在  $x_0$  基础上增加一个单位, 利润在  $R(x_0)$  基础上增加  $R'(x_0)$  个单位.

(4) 区间上可导 如果  $y = f(x)$  在  $(a, b)$  内每一点均可导, 则称该函数在  $(a, b)$  内可导; 若  $f(x)$  在  $(a, b)$  内可导, 且在  $x = a$  处右导数存在, 在  $x = b$  处左导数存在, 则称函数  $y = f(x)$  在  $[a, b]$  上可导.

(5) 可微 若函数  $y = f(x)$  在  $x_0$  的改变量  $\Delta y$  与自变量  $x$  的改变量  $\Delta x$  有下列关系

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x),$$

其中  $A$  是与  $\Delta x$  无关的常数, 则称函数  $f(x)$  在  $x_0$  可微,  $A\Delta x$  称为函数  $f(x)$  在  $x_0$  的微分, 表为  $dy = A\Delta x$  或  $df(x_0) = A\Delta x$ .

**注** 由微分的定义, 我们可以把导数看成微分的商. 例如求  $\sin x$  对  $\sqrt{x}$  的导数时就可以看成  $\sin x$  微分与  $\sqrt{x}$  微分的商, 即  $\frac{d\sin x}{d\sqrt{x}} = \frac{\cos x dx}{\frac{1}{2\sqrt{x}} dx} = 2\sqrt{x}\cos x$ .

当  $f'(x_0) \neq 0$  时,  $dy = f'(x_0)dx$  是  $\Delta y$  的线性主部.

## 2. 求各类函数的导数

(1) 求复合函数的导数 设  $y = f(u)$ ,  $u = \varphi(x)$ , 则  $y' = f'(u)\varphi'(x)$ .

这里包含抽象函数的导数.

(2) 求隐函数的导数 设函数  $y(x)$  由  $F(x, y) = 0$  确定.

把方程的两边直接对  $x$  求导, 注意  $y$  看成  $x$  的函数.

(3) 求参数方程  $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t) \end{cases}$  所确定函数的导数  $\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$ .

注意求二阶导数  $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right) \cdot \frac{dt}{dx} = \left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)' \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}}$ .

(4) 互为反函数的导数

(函数与反函数的导数) 若  $f'(x) \neq 0$ , 则  $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$ .

(5) 高阶导数的计算

① 直接法 例如, 设  $f(x) = \sin x$ , 求  $f^{(n)}(x)$  方法是求一、二、三等低阶导数, 总结出高阶导数.

② 间接法 利用已知函数的  $n$  阶导数. 设  $f(x) = \sin 4x$ , 求  $f^{(n)}(x) = 4^n \sin\left(4x + \frac{n\pi}{2}\right)$ .

③ 用莱布尼茨公式  $(uv)^{(n)} = \sum_{i=0}^n C_n^i u^{(i)} v^{(n-i)}$ . 如  $y = x^2 \ln x$ , 设  $u = x^2, v = \ln x$ .

### 3. 基本定理和基本公式

(1) 基本定理

定理 1 (导函数存在定理)  $f'(x_0)$  存在  $\Leftrightarrow f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$ .

定理 2 (函数可导与连续的关系) 可导点必是连续点, 反之未必. 例如,  $y = |x|$  在  $x = 0$  点连续但不可导.

定理 3 (一阶可微与可导的关系) 函数  $f(x)$  在  $x$  处可微  $\Leftrightarrow f(x)$  在  $x$  处可导.

(2) 公式

$(c)' = 0$ , 其中  $c$  是常数;

$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ , 其中  $\alpha$  是实数;

$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}$ ,  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ ;

$(a^x)' = a^x \ln a$ ;  $(e^x)' = e^x$ ;

$(\sin x)' = \cos x$ ;  $(\cos x)' = -\sin x$ ;  $(\tan x)' = \sec^2 x$ ;

$(\cot x)' = -\csc^2 x$ ;  $(\sec x)' = \tan x \sec x$ ;  $(\csc x)' = -\cot x \csc x$ ;

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ;  $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ;

$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ ;  $(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$ ;

$(\sqrt{1+x^2})' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ ;  $(\sqrt{1-x^2})' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ .

根据复合函数求导, 上面公式中的  $x$  都可以换成任意可导函数  $\varphi(x)$ , 即

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x), \quad \text{则} \quad \frac{df[\varphi(x)]}{d\varphi(x)} = f'[\varphi(x)].$$



如  $\frac{d\varphi^a(x)}{d\varphi(x)} = (\varphi(x)^a)'_{\varphi(x)} = a\varphi^{a-1}(x)$ , 其中  $a$  是实数.

## 2.3 题型总结与典型例题

### 题型 2-1 判断函数在某点的可导性

【解题思路】 利用导数的定义  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ , 导

数在一点存在的充分必要条件是左右导数存在且相等.

注意  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$  存在或  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$  存在并不能保证  $f'(x_0)$  存在, 即单侧导数存在并不能保证  $f'(x_0)$  存在.

利用导数定义解决以下几个问题:

(1) 求特殊函数的导数.

(2) 求极限问题 常用的公式为  $f'(x_0) = \lim_{\varphi(x) \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \varphi(x)) - f(x_0)}{\varphi(x)}$ .

例如, 已知  $f'(x_0)$  存在, 求  $\lim_{\varphi(x) \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 3\varphi(x)) - f(x_0)}{\varphi(x)}$ .

(3) 分段函数某点的导数 例如, 设  $f(x) = \begin{cases} x \arctan \frac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$  求  $f'(0)$ .

(4) 求含有绝对值的函数的导数. 如, 讨论  $f(x) = |x-1|$  在  $x=1$  的可导性.

例 2.1 设函数  $f(x) = \cos x$ , 求  $(\cos x)'$  及  $(\cos x)'|_{x=\frac{\pi}{4}}$ .

$$\begin{aligned} \text{解 } f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot (-2) \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2} \\ &= -\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = -\sin x, \end{aligned}$$

$$(\cos x)'|_{x=\frac{\pi}{4}} = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

例 2.2 设  $f(x) = (x-a)g(x)$ , 其中  $g(x)$  在  $x=a$  处连续, 求  $f'(a)$ .

解  $g(x)$  仅在  $x=a$  处连续, 在任意点  $x$  处未必可导, 即  $f'(x)$  未必存在, 因此利用导数的定义  $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)g(x) - 0}{x - a} = g(a)$ .

例 2.3 试按导数定义观察极限  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = A$ , 指出  $A$  表示什么 (假设各极限均存在).

$$\text{解 } A = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (-2) \frac{f(x_0 - 2\Delta x) - f(x_0)}{-2\Delta x} = (-2) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2\Delta x) - f(x_0)}{-2\Delta x} = -2f'(x_0).$$

**例 2.4** 设函数  $f(x) = (e^x - 1)(e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n)$ , 其中  $n$  为正整数, 求  $f'(0)$ .

**【分析】** 由于  $f(x)$  是由  $n$  个因式乘积形式给出的, 直接用乘积的求导法则计算比较困难, 但是用导数的定义计算反而简单.

$$\begin{aligned} \text{解 } f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)(e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n) - 0}{x - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2) \cdots (1 - n) = (-1)^{n-1} (n-1)!. \end{aligned}$$

**例 2.5** 已知  $f(x)$  在  $x=0$  处可导, 且  $f(0)=0$ , 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3}$ .

$$\begin{aligned} \text{解 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - x^2 f(0)}{x^3} - 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^3) - f(0)}{x^3 - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} - 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^3) - f(0)}{x^3 - 0} \\ &= f'(0) - 2f'(0) = -f'(0). \end{aligned}$$

**例 2.6** 设  $f(x)$  对任意的实数  $x_1, x_2$  有  $f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2)$ , 且  $f'(0)=1$ , 试证  $f'(x)=f(x)$ .

**证明**  $\forall x, f(x+0) = f(x)f(0)$ , 可得  $f(0)=1$ , 从而

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x)f(\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x) - 1}{\Delta x} \\ &= f(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = f(x)f'(0) = f(x). \end{aligned}$$

**例 2.7** 设  $f(x) = \begin{cases} \sin(x-1)+2, & x < 1, \\ ax+b, & x \geq 1, \end{cases}$  问  $a, b$  取何值时  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内可导.

**【分析】** 要使  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内可导, 则分段函数在分段点是连续的和可导的, 利用这两点就可以求出  $a, b$  的值.

**解** 容易知道  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax+b) = a+b$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (\sin(x-1)+2) = 2$ ,  $f(1) = a+b$ , 要使  $f(x)$  在  $x=1$  处连续, 必须  $a+b=2$ .

$$\text{因为 } f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(ax+b) - (a+b)}{x - 1} = a,$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sin(x-1) + 2 - (a+b)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sin(x-1)}{x - 1} = 1,$$

要使  $f(x)$  在  $x=1$  处可导, 则  $a=1$ , 故  $a=1, b=1$ .

**【方法小结】**  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内可导隐含了函数在分段点是连续的和可导的, 求待定常数时我们往往要用这两个条件.

**例 2.8** 设  $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$  求  $f'(x)$ .

**【分析】** 分段函数的导数分两部分来求:

(1) 在非分段点处, 用导数公式来求;



(2) 在分段点处, 首先判断函数在分段点处是否连续. 若不连续, 则一定不可导; 若连续且在分段点左右两侧函数表达式不同, 则要分别用定义求左右导数; 反之, 即分段点左右两侧函数表达式一样, 则直接用导数定义(一个式子)来求导数.

解 当  $x \neq 0$  时,  $f(x) = x^3 \sin \frac{1}{x}$  为一初等函数, 这时

$$f'(x) = 3x^2 \sin \frac{1}{x} + x^3 \left( \cos \frac{1}{x} \right) \left( -\frac{1}{x^2} \right) = 3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x};$$

由于  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^3 \sin \frac{1}{x} = 0 \neq f(0)$ , 所以  $f(x)$  在  $x=0$  处不连续, 由此可知  $f(x)$  在  $x=0$  处不可导.

例 2.9 设  $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c, & x \leq 0, \\ \ln(1+x), & x > 0, \end{cases}$  试问  $a, b, c$  为何值时,  $f(x)$  在  $x=0$  处一阶导数连续, 但二阶导数不存在.

【分析】可导首先要求连续.  $f'(0)$  存在的充分必要条件是  $f'_-(0), f'_+(0)$  存在并且相等.

解 (1)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (ax^2 + bx + c) = c, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(1+x) = 0, f(0) = c$ . 要使  $f(x)$  在  $x=0$  处可导, 则  $f(x)$  在  $x=0$  处必先连续即  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ , 故得  $c=0$ .

$$(2) f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax^2 + bx + 0 - 0}{x - 0} = b.$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x) - 0}{x - 0} = 1.$$

若  $f'(0)$  存在, 则  $f'_-(0) = f'_+(0)$ , 故得  $b=1$ .

$$(3) f'(x) = \begin{cases} 2ax + 1, & x < 0, \\ 1, & x = 0, \\ \frac{1}{1+x}, & x > 0. \end{cases}$$

无论  $a$  为何值, 均有  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = f'(0)$ , 故  $f'(x)$  在  $x=0$  处连续.

$$f''_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f'_-(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2ax + 1 - 1}{x - 0} = 2a,$$

$$f''_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'_+(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{x - 0} = 1.$$

若使  $f''(0)$  不存在, 则  $f''_-(0) \neq f''_+(0)$ , 即  $2a \neq 1, a \neq \frac{1}{2}$ .

结论: 当  $a \neq \frac{1}{2}, b=1, c=0$  时  $f(x)$  在  $x=0$  处一阶导数连续, 但二阶导数不存在.

例 2.10 设  $f(x)$  在  $x=0$  处二阶可导, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x} = 1$ , 求  $f(0), f'(0), f''(0)$  的值.

解 因为  $f(x)$  在  $x=0$  处二阶可导, 所以  $f(x), f'(x)$  在  $x=0$  处连续, 在  $x=0$  附近  $f'(x)$  存在.

(1) 因为  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x} = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) = 0$ , 所以  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$ .

(2) 因为  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\frac{1}{2}x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x} = 1$ , 而  $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ , 所以  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0) = 0$ .

(3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\frac{1}{2}x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = f''(0) = 1$ .

### 题型 2-2 导数的应用

**【解题思路】** 利用导数的几何意义: 函数  $y = f(x)$  在  $x_0$  处的导数  $f'(x_0)$  是曲线  $y = f(x)$  在对应点  $A(x_0, f(x_0))$  处的切线的斜率, 即  $k_{\text{切}} = f'(x_0)$ ,  $k_{\text{法}} = \frac{1}{f'(x_0)}$ , 再根据直线的点斜式方程, 可以求出曲线  $y = f(x)$  在对应点  $A(x_0, f(x_0))$  处的切线方程和法线方程.

**例 2.11** 曲线  $y = \cos x$  在  $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\right)$  处的切线方程及法线方程.

**解** 切线斜率  $y' \Big|_{x=\frac{\pi}{3}} = \sin x \Big|_{x=\frac{\pi}{3}} = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , 故在  $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\right)$  处, 切线方程为  $y - \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ ; 法线斜率为  $-\left(1 / -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ , 故法线方程为

$$y - \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \left(x - \frac{\pi}{3}\right).$$

**注** 切线方程切不可写成  $y - \frac{1}{2} = -\sin x \left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ , 一定要求出曲线在  $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\right)$  处的斜率.

**例 2.12** 曲线  $y = x^2$  与曲线  $y = a \ln x (a \neq 0)$  相切, 求  $a$ . (2010 年考研数学二)

**解** 相切指相交且有公共切线, 两条曲线有交点, 且在交点处有公切线.

$$\text{由 } \begin{cases} x^2 = a \ln x, \\ 2x = \frac{a}{x}, \end{cases} \quad \text{得 } \begin{cases} x = e^{\frac{1}{2}}, \\ a = 2e. \end{cases}$$

**例 2.13** 设  $f(x)$  在  $x = 0$  处连续, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[f(x) + 1]x^2}{x - \sin x} = 2$ , 求曲线  $y = f(x)$  在点  $(0, f(0))$  处的切线方程.

$$\begin{aligned} \text{解 } \lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + 1) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[f(x) + 1]x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[f(x) + 1]x^2}{x - \sin x} \cdot \frac{x - \sin x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[f(x) + 1]x^2}{x - \sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{6} x^3 = 0. \end{aligned}$$

由于  $f(x)$  在  $x = 0$  处连续, 故  $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$ . 于是

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[f(x) + 1]x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[f(x) + 1]x^2}{x - \sin x} \cdot \frac{x - \sin x}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[f(x) + 1]x^2}{x - \sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{6} x^3 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$



故所求的切线方程为  $y - f(0) = \frac{1}{3}x$ , 即  $y = \frac{1}{3}x + 1$ .

**例 2.14** 设  $f(x) = \begin{cases} (1 + \sin 2x)^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0, \end{cases}$  且  $f(x)$  在  $x = 0$  处连续. (1) 求  $a$  的值;

(2) 求曲线  $y = f(x)$  在  $(0, a)$  处的切线方程.

**解** 因为  $f(x)$  在  $x = 0$  处连续, 所以  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = a$ , 即

$$a = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin 2x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sin 2x} = e^2.$$

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \sin 2x)^{\frac{1}{x}} - e^2}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x} \ln(1 + \sin 2x)} - e^2}{x} = e^2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x} \ln(1 + \sin 2x) - 2} - 1}{x} \\ &= e^2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin 2x) - 2x}{x^2} = e^2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2 \cos 2x}{1 + \sin 2x} - 2}{2x} \\ &= e^2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1 - \sin 2x}{x(1 + \sin 2x)} = e^2 \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{x} - 2 \right) \\ &= -2e^2. \end{aligned}$$

所求切线方程为  $y - e^2 = -2e^2(x - 0)$ , 即  $y = e^2(1 - 2x)$ .

**例 2.15** 在曲线  $\begin{cases} x = \arctan t, \\ y = \ln \sqrt{1 + t^2} \end{cases}$  上求对应于  $t = 1$  处的法线方程.

**解** 当  $t = 1$  时,  $x = \frac{\pi}{4}$ ,  $y = \frac{1}{2} \ln 2$ , 而  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=1} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \bigg|_{t=1} = \frac{\frac{t}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}} \bigg|_{t=1} = 1$ , 所以法线方程

为  $y - \frac{1}{2} \ln 2 = -1 \left( x - \frac{\pi}{4} \right)$ , 即  $y + x - \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{\pi}{4} = 0$ .

**例 2.16** 设曲线  $y = f(x)$  和  $y = x^2 - x$  在点  $(1, 0)$  处有公共切线, 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} n f \left( \frac{n}{n+2} \right)$ .

**【分析】** 有公共切线, 则有交点且在交点处有相同的切线. (1) 切点为  $(1, 0)$ , 故  $f(1) = 0$ ; (2) 有公共切线, 故  $f'(1) = (2x - 1)|_{x=1} = 1$ .

**解** 由条件可知  $f(1) = 0$ ,  $f'(1) = 1$ , 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n f \left( \frac{n}{n+2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f \left( 1 + \frac{-2}{n+2} \right) - f(1)}{\frac{-2}{n+2} \cdot \frac{n}{n+2}} = -2f'(1) = -2.$$

**题型 2-3 求分段函数的导数 (分段函数在分段点的导数必须用定义)**

**【解题思路】** 对于分段函数的求导问题, 在分段点处的导数必须用定义求, 在分段点外一个区间上的导数用运算法则求.

**例 2.17** 设  $f(x) = \begin{cases} \ln(1+x), & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ \frac{1}{x} \sin^2 x, & x < 0, \end{cases}$  求  $f'(x)$ .

解 在分段点  $x=0$  处的导数必须用定义求.

当  $x>0$  时,  $f'(x)=\frac{1}{x+1}$ ; 当  $x<0$  时,  $f'(x)=\frac{x\sin 2x-\sin^2 x}{x^2}$ .

由于  $x=0$  是该函数的分段点, 由导数的定义, 有

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1)-0}{x-0} = 1, \\ f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin^2 x}{x^2} = 1, \end{aligned}$$

因此  $f'(0)=1$ , 于是

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1}, & x>0, \\ 1, & x=0, \\ \frac{x\sin 2x-\sin^2 x}{x^2}, & x<0, \end{cases} \quad \text{即} \quad f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1}, & x \geq 0, \\ \frac{x\sin 2x-\sin^2 x}{x^2}, & x < 0. \end{cases}$$

例 2.18 函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos 2x}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$  求  $f'(x)$ .

解 当  $x=0$  时,

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1-\cos 2x}{x}-0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 x}{x^2} = 2.$$

当  $x \neq 0$  时,  $f'(x) = \left( \frac{1-\cos 2x}{x} \right)' = \frac{2x\sin 2x - (1-\cos 2x)}{x^2}$ . 故

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x\sin 2x - 1 + \cos 2x}{x^2}, & x \neq 0, \\ 2, & x = 0. \end{cases}$$

例 2.19 已知  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases}$  求  $f'_-(0), f'_+(0)$ .

解  $f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x-0}{x-0} = -1$ .

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2-0}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0.$$

由于  $f'_-(0) \neq f'_+(0)$ , 所以  $f'(0)$  不存在.

#### 题型 2-4 可导性与连续性的讨论

【解题思路】 利用连续的定义  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , 判断  $f(x)$  在

$x_0$  点判断是否连续; 利用导数的定义  $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$  或  $f'(x_0) =$

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  来判断  $f(x)$  在  $x_0$  点是否可导.

例 2.20 讨论函数  $f(x) = |\sin x|$  在  $x=0$  处的连续性与可导性.

解 因为  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (-\sin x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x = 0$ ,  $f(0) = |\sin 0| = 0$ , 所以



$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ , 于是  $f(x) = |\sin x|$  在  $x=0$  处连续.

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x - 0}{x - 0} = -1,$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - 0}{x - 0} = 1.$$

由于  $f'_-(0) \neq f'_+(0)$ , 所以  $f(x) = |\sin x|$  在  $x=0$  处不可导.

**例 2.21** 讨论  $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$  在  $x=0$  处的连续性与可导性.

**解** 因为  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^3 \sin \frac{1}{x} = 0 = f(0)$ , 所以函数在  $x=0$  处连续.

又由  $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \sin \frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$ , 所以函数在  $x=0$  处可导.

### 题型 2-5 用四则运算求导法则、复合函数及反函数求导法则求导数

**【解题思路】** 利用四则运算求导法则、复合函数及反函数求导法则.

设函数  $u = u(x)$  及  $v = v(x)$  在点  $x$  处具有导数, 则:

$$(1) [u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x);$$

$$(2) [u(x) \cdot v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x), [cu(x)]' = cu'(x), \\ (uvw)' = u'vw + uv'w + uvw';$$

$$(3) \left[ \frac{u(x)}{v(x)} \right]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)};$$

$$(4) \text{复合函数求导法则, 设 } y = f(u), u = \varphi(x), \text{ 则 } y' = f'(u)\varphi'(x);$$

$$(5) \text{ 设 } y = f(x) \text{ 的反函数为 } x = \varphi(y), \text{ 则 } f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}.$$

**例 2.22** 求下列函数的导数:

$$(1) y = e^{\frac{1}{\sin x}};$$

$$(2) y = \sqrt[3]{1-2x^2};$$

$$(3) y = \ln \tan x;$$

$$(4) y = \ln \cos(e^x);$$

$$(5) y = \sec^3(\ln(x^2+1));$$

$$(6) y = x \arctan x - \ln \sqrt{1+x^2}.$$

**解** (1)  $y' = \frac{de^{\frac{1}{\sin x}}}{dx} = \frac{de^{\frac{1}{\sin x}}}{d\frac{1}{\sin x}} \cdot \frac{d\frac{1}{\sin x}}{d\sin x} \cdot \frac{d\sin x}{dx} = e^{\frac{1}{\sin x}} \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) \cdot \cos x;$

$$(2) y' = (\sqrt[3]{1-2x^2})' = \frac{1}{3}(1-2x^2)^{-\frac{2}{3}} \cdot (1-2x^2)' = \frac{-4x}{3\sqrt[3]{(1-2x^2)^2}}.$$

$$(3) y' = (\ln \tan x)' = \frac{1}{\tan x} \cdot (\tan x)' = \frac{\sec^2 x}{\tan x} = \frac{2}{\sin 2x}.$$

(4) 所给函数可分解为  $y = \ln u, u = \cos v, v = e^x$ . 因为  $\frac{dy}{du} = \frac{1}{u}, \frac{du}{dv} = -\sin v, \frac{dv}{dx} = e^x$ , 故

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \cdot (-\sin v) \cdot e^x = -\frac{\sin(e^x)}{\cos(e^x)} \cdot e^x = -e^x \tan(e^x).$$

不写出中间变量,此例可写成:

$$\frac{dy}{dx} = [\ln \cos(e^x)]' = \frac{1}{\cos(e^x)} [\cos(e^x)]' = \frac{-\sin(e^x)}{\cos(e^x)} (e^x)' = -e^x \tan(e^x).$$

(5) 设  $y = u^3, u = \sec v, v = \ln w, w = z + 1, z = x^2$ , 根据复合函数求导法则, 有

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dw} \cdot \frac{dw}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = 3u^2 \cdot \sec v \cdot \tan v \cdot \frac{1}{w} \cdot 1 \cdot 2x \\ &= 3\sec^2(\ln x(x^2 + 1)) \sec(\ln(x^2 + 1)) \tan(\ln(x^2 + 1)) \frac{1}{x^2 + 1} 2x \\ &= 6 \frac{x}{x^2 + 1} \sec^3(\ln(x^2 + 1)) \tan(\ln(x^2 + 1)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (6) \quad y' &= \left[ x \arctan x - \frac{1}{x} \ln(1 + x^2) \right]' = \arctan x + \frac{x}{1 + x^2} + \frac{1}{x^2} \ln(1 + x^2) - \frac{1}{x} \frac{2x}{1 + x^2} \\ &= \arctan x + \frac{x - 2}{1 + x^2} + \frac{1}{x^2} \ln(1 + x^2). \end{aligned}$$

**例 2.23** 设函数  $f, \varphi$  可导,  $y = f(\arctan x + \varphi(\tan x))$ , 求  $y'$ .

$$\begin{aligned} \text{解} \quad y' &= f'(\arctan x + \varphi(\tan x)) \cdot (\arctan x + \varphi(\tan x))' \\ &= f'(\arctan x + \varphi(\tan x)) \cdot \left( \frac{1}{1 + x^2} + \varphi'(\tan x)(\tan x)' \right) \\ &= f'(\arctan x + \varphi(\tan x)) \cdot \left( \frac{1}{1 + x^2} + \varphi'(\tan x) \sec^2 x \right). \end{aligned}$$

$$\text{注} \quad \frac{df[\varphi(x)]}{dx} = f'[\varphi(x)] \varphi'(x).$$

**例 2.24** 设  $y = f(x)$  二阶可导,  $f'(x) \neq 0, f(0) = 1, f'(0) = \sqrt{15}, f''(0) = -2, y = f(x)$  的反函数为  $x = \varphi(y)$ , 求  $\frac{|\varphi''(1)|}{[1 + \varphi'^2(1)]^{\frac{3}{2}}}$ .

**解** 由  $f(0) = 1$ , 得  $\varphi(1) = 0$ . 由反函数导数公式  $\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ , 得  $\varphi'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{\sqrt{15}}$ . 再由复合函数求导法则得

$$\begin{aligned} \varphi''(y) &= \left[ \frac{1}{f'(x)} \right]'_y = \left[ \frac{1}{f'(x)} \right]'_{f(x)} \cdot [f'(x)]'_x \cdot x'_y \quad \left( x'_y = \varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)} \right) \\ &= -\frac{1}{f'^2(x)} \cdot f''(x) \cdot \frac{1}{f'(x)} = -\frac{f''(x)}{f'^3(x)}. \\ \varphi''(1) &= -\frac{f''(0)}{f'^3(0)} = -\frac{2}{15\sqrt{15}}. \\ \frac{|\varphi''(1)|}{[1 + \varphi'^2(1)]^{\frac{3}{2}}} &= \frac{\frac{2}{15\sqrt{15}}}{\left(1 + \frac{1}{15}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{32}. \end{aligned}$$

### 题型 2-6 隐函数的导数

**【解题思路】** 求隐函数的导数关键是明确对哪个变量求导, 这样, 另一个变量就是方程所确定的隐函数. 隐函数求导方法小结: (1) 方程两端同时对  $x$  求导数, 注意把  $y$  当作复合



函数求导的中间变量来看待,例如 $(\ln y)'_x = \frac{1}{y} y'$ . (2)从求导后的方程中解出 $y'$ 来. (3)隐函数求导允许其结果中含有 $y$ ,但求一点的导数时不但要把 $x$ 值代进去,还要把对应的 $y$ 值代进去.

**例 2.25** 设方程 $xy + e^y = e$ 确定了 $y$ 是 $x$ 的函数,求 $y'(0)$ .

**解**  $xy + e^y = e,$  (1)

第一步,将 $x=0$ 代入方程(1),得 $y=1$ .

第二步,将方程(1)两边关于 $x$ 求导,得

$$y + xy' + e^y y' = 0, \quad (2)$$

第三步,由(2)解得 $y' = -\frac{y}{x + e^y}$ ,当 $x=0$ 时 $y=1$ ,所以 $y'(0) = -\frac{1}{e}$ . 或将 $x=0$ 时 $y=1$ 代入(2)中,解得 $y'(0) = -\frac{1}{e}$ .

**例 2.26** 设函数 $x=x(t)$ 由方程 $t\cos x + x = 0$ 确定,又函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^{y-2} - xy = 1$ 确定,求复合函数 $y=y(x(t))$ 的导数 $\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0}$ .

**【分析】**这是一道复合函数,隐函数求导的题. $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt}$ ,而 $\frac{dy}{dx}$ 和 $\frac{dx}{dt}$ 需要利用隐函数求导法来求.

**解** 先给方程标号

$$t\cos x + x = 0, \quad (1)$$

$$e^{y-2} - xy = 1. \quad (2)$$

将 $t=0$ 代入方程(1)得 $x=0$ ,再将 $x=0$ 代入方程(2)得 $y=2$ .

在方程(1)两端关于 $t$ 求导,得

$$\cos x - t\sin x \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{dx}{dt} = 0, \quad (3)$$

故 $\frac{dx}{dt} = \frac{\cos x}{t\sin x - 1}$ . 于是 $\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{\substack{t=0 \\ x=0}} = \left. \frac{\cos x}{t\sin x - 1} \right|_{\substack{t=0 \\ x=0}} = -1$ .

在方程(2)两端关于 $x$ 求导,得

$$e^{y-2} \frac{dy}{dx} - y - x \frac{dy}{dx} = 0, \quad (4)$$

故 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{e^{y-2} - x}$ .

将 $x=0, y=2$ 代入上式,得 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{\substack{x=0 \\ y=2}} = \frac{y}{e^{y-2} - x} \Big|_{\substack{x=0 \\ y=2}} = 2$ ,因此

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} \cdot \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = -1 \times 2 = -2.$$

**注** 可直接将 $t=0, x=0$ 代入(3)式得 $\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{\substack{t=0 \\ x=0}} = -1$ ,将 $x=0, y=2$ 代入(4)

式得 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{\substack{x=0 \\ y=2}} = 2$ .

**例 2.27** 设函数  $y=y(x)$  由方程  $x^2-y+1=e^y$  确定, 求  $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$ . (2012 年数学二)

**【分析】** 这是一个隐函数, 可以利用隐函数求导法则求解.

**解** 
$$x^2-y+1=e^y. \quad (1)$$

把  $x=0$  代入(1)式得  $y=0$ .

对(1)式两边关于  $x$  求导得

$$2x - \frac{dy}{dx} = e^y \frac{dy}{dx}. \quad (2)$$

把  $x=0, y=0$  代入(2)式得  $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 0$ .

对方程(2)两边关于  $x$  求导得

$$2 - \frac{d^2y}{dx^2} = e^y \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + e^y \frac{d^2y}{dx^2}. \quad (3)$$

再将  $x=0, y=0, \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=0$  代入(3)式可得  $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0} = \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{\substack{x=0 \\ y=0 \\ \frac{dy}{dx}=0}} = 1$ .

### 题型 2-7 取对数求导法

**【解题思路】** 对形如  $y=u(x)^{v(x)}$  的函数的幂指函数或多个因式的积、商、乘方、开方组成的函数, 对于这类函数, 可以先在函数两边取对数, 然后在等式两边同时对自变量  $x$  求导, 最后解出所求导数. 我们把这种方法称为取对数求导法.

**例 2.28** 设  $y=x^{\sin x} (x>0)$ , 求  $y'$ .

**解** 这函数是幂指函数, 为了求此函数的导数, 可以先在两边取对数, 得  $\ln y = \sin x \cdot \ln x$ . 此式两边对  $x$  求导, 有  $\frac{1}{y}y' = \cos x \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}$ , 于是

$$y' = y \left( \cos x \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x} \right) = x^{\sin x} \left( \cos x \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x} \right).$$

**例 2.29** 设  $y = \frac{\sqrt[3]{(x-1)^2(x-2)}}{\sqrt{(x-3)^3(x-4)^5}}$ , 求  $y'$ .

**解** 先在两边取对数, 得

$$\ln y = \frac{1}{3} [2 \ln |x-1| + \ln |x-2|] - \frac{1}{2} [3 \ln |x-3| + 5 \ln |x-4|].$$

上式两边对  $x$  求导, 有  $\frac{1}{y}y' = \frac{1}{3} \left[ \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x-2} \right] - \frac{1}{2} \left[ \frac{3}{x-3} + \frac{5}{x-4} \right]$ , 于是

$$y' = \frac{y}{3} \left[ \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x-2} \right] - \frac{y}{2} \left[ \frac{3}{x-3} + \frac{5}{x-4} \right].$$

**例 2.30** 求函数  $y = \left( \frac{x}{1+x} \right)^x$  的导数.

**【错解】**  $y' = x \left( \frac{x}{1+x} \right)^{x-1} \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = x \left( \frac{x}{1+x} \right)^{x-1} \frac{1}{(1+x)^2}.$

**【分析】** 这函数不是指数函数型的一般复合函数, 不能按照复合函数的求导法则计算导数, 应该两边取对数后再求导.



解 两边取对数得  $\ln y = x \ln \left| \frac{x}{1+x} \right| = x[\ln|x| - \ln|1+x|]$ . 两边求导得

$$\frac{y'}{y} = [\ln x - \ln(1+x)] + x \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} \right),$$

故有  $y' = y \left( \ln \frac{x}{1+x} + \frac{1}{1+x} \right) = \left( \frac{x}{1+x} \right)^x \left( \ln \frac{x}{1+x} + \frac{1}{1+x} \right)$ .

### 题型 2-8 由参数方程所确定的函数的导数

【解题思路】 设  $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$   $x = \varphi(t)$  具有单调连续的反函数  $t = \varphi^{-1}(x)$ , 则变量  $y$  与  $x$

构成复合函数关系  $y = \psi[\varphi^{-1}(x)]$ , 且  $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ ,  $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}$ . 利用参数方程的求导公式

求导.

例 2.31 设函数由参数方程  $\begin{cases} x = 2t + t^2, \\ y = \psi(t) \end{cases}$  ( $t > -1$ ) 所确定, 其中  $\psi(t)$  具有 2 阶导数, 求

$\frac{d^2y}{dx^2}$ . (2010 年考研数学二)

解  $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{2t+2},$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{2t+2}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi''(t)(2t+2) - 2\psi'(t)}{(2t+2)^2} = \frac{\psi''(t)(t+1) - \psi'(t)}{4(1+t)^3}$$

例 2.32 求椭圆方程  $\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t \end{cases}$  在  $t = \frac{\pi}{4}$  时的切线方程.

解 当  $t = \frac{\pi}{4}$  时, 椭圆上的相应点  $M_0$  的坐标为

$$x_0 = a \cos \frac{\pi}{4} = \frac{a\sqrt{2}}{2}, \quad y_0 = b \sin \frac{\pi}{4} = \frac{b\sqrt{2}}{2}.$$

曲线在点  $M_0$  的切线的斜率为  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{(b \sin t)'}{(a \cos t)'} \bigg|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{b \cos t}{-a \sin t} \bigg|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\frac{b}{a}$ , 代入点斜式

方程即得椭圆在点  $M_0$  处的切线方程为  $y - \frac{b\sqrt{2}}{2} = -\frac{b}{a} \left( x - \frac{a\sqrt{2}}{2} \right)$ .

例 2.33 设  $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = t \sin t + \cos t, \end{cases}$   $t$  为参数, 则  $\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=\frac{\pi}{4}}$ .

解  $dx = \cos t dt, \quad dy = t \cos t dt, \quad \frac{dy}{dx} = t,$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}(t)}{\cos t} = \frac{(t)'}{\cos t} = \frac{1}{\cos t} = \sec t, \quad \text{所以 } \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}.$$

例 2.34  $\begin{cases} x = \arctan t, \\ y = 3t + t^3, \end{cases}$  则  $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=1}$ .

解  $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3+3t^2}{1+t^2} = 3(1+t^2)^{-1},$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} [3(1+t^2)^{-1}] = \frac{\frac{d}{dt} [3(1+t^2)^{-1}]}{\frac{dx}{dt}} = \frac{12t(1+t^2)^{-2}}{1+t^2} = 12t(1+t^2)^{-3}, \text{ 故 } \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=1} = 48.$$

### 题型 2-9 求函数在一点的微分

【解题思路】 利用  $df(x)|_{x=x_0} = f'(x_0)\Delta x = f'(x_0)dx$  求函数在一点的微分.

例 2.35 求函数  $y=x^3$  当  $x=2, \Delta x=0.02$  时的微分.

解 先求函数在任一点的微分  $dy = f'(x)\Delta x = (x^3)'\Delta x = 3x^2\Delta x$ , 再求函数当  $x=2, \Delta x=0.02$  时的微分  $dy|_{\substack{x=2 \\ \Delta x=0.02}} = 3x^2\Delta x|_{\substack{x=2 \\ \Delta x=0.02}} = 3 \times 2^2 \times 0.02 = 0.24.$

例 2.36 求函数  $y=x^2$  在  $x=1$  和  $x=3$  处的微分.

解 函数  $y=x^2$  在  $x=1$  处的微分为  $dy|_{x=1} = (x^2)'|_{x=1}\Delta x = 2\Delta x$ ; 在  $x=3$  处的微分为  $dy|_{x=3} = (x^2)'|_{x=3}\Delta x = 6\Delta x.$

例 2.37 设函数  $f(u)$  可导,  $y=f(x^2)$  当自变量  $x$  在  $x=-1$  处取得增量  $\Delta x=-0.1$  时, 相应的函数增量  $\Delta y$  的线性主部为 0.1, 则  $f'(1) = \underline{\hspace{2cm}}$ . (2002 年高数二.)

A. -1                      B. 0.1                      C. 1                      D. 0.5

【分析】 相应的函数增量  $\Delta y$  的线性主部就是微分  $dy$ , 因此利用微分可以解决.

解 因为  $\frac{dy}{dx} = 2xf'(x^2)$ , 则  $dy|_{\substack{x=-1 \\ \Delta x=-0.1}} = 2xf'(x^2) \cdot \Delta x|_{\substack{x=-1 \\ \Delta x=-0.1}}$ , 即  $0.1 = 2(-1)f'(1) \cdot (-0.1)$ , 故  $f'(1) = 0.5.$

例 2.38 在等式  $d(\quad) = xdx$  的括号中填入适当的函数, 使等式成立.

解 我们知道,  $d(x^2) = 2xdx$ . 可见,  $xdx = \frac{1}{2}d(x^2) = d\left(\frac{x^2}{2}\right)$ , 即  $d\left(\frac{x^2}{2}\right) = xdx.$

更进一步  $d\left(\frac{x^2}{2} + c\right) = xdx.$

### 题型 2-10 利用 $df(x) = f'(x)dx$ 求函数的微分

【解题思路】 利用  $df(x) = f'(x)dx$  求函数的微分.

例 2.39 设  $y = x\sin 2x$ , 求  $dy$ .

解  $dy = d(x\sin 2x) = \sin 2x dx + x d(\sin 2x) = \sin 2x dx + 2x \cos 2x dx$   
 $= (\sin 2x + 2x \cos 2x) dx.$

例 2.40 求函数  $y = e^{1-3x} \cos x$  的微分.

解  $dy = d(e^{1-3x} \cos x) = \cos x d(e^{1-3x}) + e^{1-3x} d(\cos x)$   
 $= (\cos x) e^{1-3x} (-3dx) + e^{1-3x} (-\sin x) dx = -e^{1-3x} (3\cos x + \sin x) dx.$

### 题型 2-11 利用微分形式不变性求函数的微分

【解题思路】 无论  $u$  是自变量还是复合函数的中间变量, 函数  $y=f(u)$  的微分形式总



是可以按微分定义的形式来写,即有  $dy = f'(u)du$ ,这一性质称为微分形式的不变性.利用微分形式不变性求函数的微分.

**例 2.41** 求函数  $y = \sin(2x+1)$  的微分.

**解** 把  $2x+1$  看成中间变量,则

$$dy = d(\sin u) = \cos u du = \cos(2x+1)d(2x+1) = \cos(2x+1) \cdot 2dx = 2\cos(2x+1)dx.$$

**例 2.42** 设  $y = \ln^2(1-x)$ , 求  $dy$ .

$$\text{解 } dy = 2\ln(1-x)d\ln(1-x) = 2\ln(1-x) \cdot \frac{-1}{1-x}dx = \frac{2}{x-1}\ln(1-x)dx.$$

### 题型 2-12 利用微分进行近似计算

**【解题思路】** 利用  $\Delta y \approx dy = f'(x_0)\Delta x$ , 或  $f'(x_0 + \Delta x) \approx f'(x_0) + f''(x_0)\Delta x$  进行近似计算.

**例 2.43** 有一批半径为 1cm 的球,为了提高球面的光洁度,要镀上一层铜,厚度定为 0.01cm,估计一下每只球需用铜多少克?(铜的密度为  $8.9\text{g/cm}^3$ )

**解** 先求出镀层的体积,再乘上密度就得到每只球需用铜的质量.

因为镀层的体积等于两个球体体积之差,所以它就是球体体积  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$  当  $R$  自  $R_0$  取得增量  $\Delta R$  时得增量  $\Delta V$ . 求  $V$  对  $R$  的导数得

$$V'|_{R=R_0} = \left( \frac{4}{3}\pi R^3 \right)' \Big|_{R=R_0} = 4\pi R, \text{ 于是 } \Delta V \approx 4\pi R_0^2 \Delta R.$$

将  $R=1, \Delta R=0.01$  代入上式,得  $\Delta V \approx 4 \times 3.14 \times 1^2 \times 0.01 \approx 0.13(\text{cm}^3)$ , 于是镀每只球需用的铜约为  $0.13 \times 8.9 \approx 1.16(\text{g})$ .

**例 2.44** 计算  $\sin 30^\circ 30'$  的近似值.

**解** 把  $30^\circ 30'$  化为弧度,得  $30^\circ 30' = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{360}$ .

由于所求的是正弦函数的值,故设  $f(x) = \sin x$ . 此时  $f'(x) = \cos x$ . 如果取  $x_0 = \frac{\pi}{6}$ , 则

$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$  与  $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$  都容易计算,并且  $\Delta x = \frac{\pi}{360}$  比较小,所以有

$$\begin{aligned} \sin 30^\circ 30' &= \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{360}\right) \approx \sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6} \cdot \frac{\pi}{360} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{360} \\ &\approx 0.5000 + 0.0076 = 0.5076. \end{aligned}$$

### 题型 2-13 求高阶导数

**【解题思路】** 求高阶导数的方法主要有 4 种:

(1) 由直接求低阶导数总结规律,推断高阶导数.

(2) 利用下面的公式间接求高阶导数. 要记住几个常见的高阶导数.

$$\textcircled{1} (e^x)^{(n)} = e^x;$$

$$\textcircled{2} (a^x)^{(n)} = a^x (\ln a)^n;$$

$$\textcircled{3} [\sin(ax+b)]^{(n)} = a^n \sin\left(ax+b+\frac{n\pi}{2}\right);$$

$$\textcircled{4} [\cos(ax+b)]^{(n)} = a^n \cos\left(ax+b+\frac{n\pi}{2}\right);$$

$$\textcircled{5} \left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}};$$

$$\textcircled{6} (\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{x^n};$$

$$\textcircled{7} \left( \frac{1}{ax+b} \right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n! a^n}{(ax+b)^{n+1}}.$$

(3) 利用莱布尼茨公式求乘积的高阶导数.

(4) 泰勒公式(第3章).

**例 2.45** 求  $y = \ln(1+x)$  的  $n$  阶导数.

**【分析】** 可直接求, 然后归纳总结.

$$\text{解 } y = \ln(1+x), \quad y' = \frac{1}{1+x}, \quad y'' = -\frac{1}{(1+x)^2},$$

$$y''' = \frac{1 \cdot 2}{(1+x)^3}, \quad y^{(4)} = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(1+x)^4}.$$

$$\text{一般地, } y^{(n)} = [\ln(1+x)]^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

$$\text{由数学归纳法知 } f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}, \quad n=1, 2, \dots.$$

**例 2.46** 设  $y = f(x^2)$ , 若  $f''(x)$  存在, 求  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ .

$$\text{解 } \frac{dy}{dx} = f'(x^2) \cdot 2x, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = f''(x^2) 4x^2 + 2f'(x^2).$$

**例 2.47** 设  $f'(x) = e^{2f(x)}$ , 若  $f'(0) = 1$  存在, 求  $f^{(n)}(0)$ .

**解** 因为  $f'(0) = 1$ , 所以  $f(0) = 0$ .

$$f''(x) = e^{2f(x)} \cdot 2f'(x) = 2e^{2f(x)} \cdot e^{2f(x)} = 2e^{4f(x)},$$

$$f'''(x) = 2e^{4f(x)} \cdot 4f'(x) = 2 \cdot 4e^{4f(x)} \cdot e^{2f(x)} = 2 \cdot 4e^{6f(x)},$$

$$f^{(4)}(x) = 2 \cdot 4e^{6f(x)} \cdot 6f'(x) = 2 \cdot 4 \cdot 6e^{6f(x)} \cdot e^{2f(x)} = 2 \cdot 4 \cdot 6e^{8f(x)},$$

$\vdots$

$$f^{(n)}(x) = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2(n-1) \cdot e^{2nf(x)},$$

$$f^{(n)}(0) = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2(n-1) \cdot e^{2nf(0)} = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2(n-1) = 2^{n-1} (n-1)!.$$

**例 2.48**  $y = x^2 e^{2x}$ , 求  $y^{(20)}$ .

**解** 设  $u = e^{2x}$ ,  $v = x^2$ , 则  $u^{(k)} = 2^k e^{2x}$  ( $k=1, 2, \dots, 20$ ),  $v' = 2x$ ,  $v'' = 2$ ,  $v^{(k)} = 0$  ( $k=3, 4, \dots, 20$ ), 代入莱布尼茨公式, 得

$$\begin{aligned} y^{(20)} &= (x^2 e^{2x})^{(20)} = 2^{20} e^{2x} \cdot x^2 + 20 \cdot 2^{19} e^{2x} \cdot 2x + \frac{20 \cdot 19}{2!} 2^{18} e^{2x} \cdot 2 \\ &= 2^{20} e^{2x} (x^2 + 20x + 95). \end{aligned}$$

**例 2.49** 函数  $f(x) = x^2 \cdot 2^x$  在  $x=0$  处的  $n$  阶导数  $f^{(n)}(0)$ .

**解**  $f^{(n)}(x) = C_n^0 x^2 (2^x)^{(n)} + C_n^1 (x^2)' (2^x)^{(n-1)} + C_n^2 (x^2)'' (2^x)^{(n-2)}$ , 故

$$f^{(n)}(0) = C_n^2 2 (2^x)^{(n-2)} \big|_{x=0} = \frac{n(n-1)}{2} 2 (\ln 2)^{n-2} = n(n-1) (\ln 2)^{n-2}.$$

**例 2.50** 设  $f(x)$  在  $(a, b)$  内二次可导, 且存在常数  $\alpha, \beta$ , 使得对于  $\forall x \in (a, b)$ , 有  $f'(x) = \alpha f(x) + \beta f''(x)$ , 则  $f(x)$  在  $(a, b)$  内无穷次可导.

**证明** 若  $\beta \neq 0$ , 对于  $\forall x \in (a, b)$ , 有

$$f'(x) = \alpha f(x), \quad f''(x) = \alpha f'(x) = \alpha^2 f(x), \quad \dots, \quad f^{(n)}(x) = \alpha^n f(x),$$

从而  $f(x)$  在  $(a, b)$  内无穷次可导.



若  $\beta \neq 0$ , 对于  $\forall x \in (a, b)$ , 有

$$f''(x) = \frac{f'(x) - \alpha f(x)}{\beta} = A_1 f'(x) + B_1 f(x),$$

其中  $A_1 = \frac{1}{\beta}$ ,  $B_1 = -\frac{\alpha}{\beta}$ . 而

$$f'''(x) = A_1 f''(x) + B_1 f'(x).$$

设  $f^{(n)}(x) = A_1 f^{(n-1)}(x) + B_1 f^{(n-2)}(x)$ , 则  $f^{(n+1)}(x) = A_1 f^{(n)}(x) + B_1 f^{(n-1)}(x)$ , 即  $f(x)$  在  $(a, b)$  内任意阶可导.

## 2.4 课后习题解答

### 习题 2.1

1. 根据导数的定义求下列函数的导数:

(1)  $y = ax + b$ , 求  $\frac{dy}{dx}$ ;

(2)  $f(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3$ , 求  $f'(1), f'(2), f'(3)$ ;

(3)  $f(x) = (x-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}$ , 求  $f'(1)$ ;

(4)  $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$  求  $f'(0)$ ;

(5)  $f(x) = x|x|$ , 求  $f'(0)$ .

解 (1)  $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a(x+\Delta x) + b - ax - b}{\Delta x} = a$ ;

(2)  $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)^2(x-3)^3 - 0}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x-2)^2(x-3)^3 = -8$ ,

$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = 0$ ;  $f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x-3} = 0$ ;

(3)  $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}} - 0}{x-1} = \frac{\pi}{4}$ ;

(4)  $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ ;

(5)  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ -x^2, & x < 0, \end{cases}$

$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 0}{x-0} = 0$ ,  $f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^2 - 0}{x-0} = 0$ ,

$f'_+(0) = f'_-(0)$ , 故  $f'(0) = 0$ .

2. 下列各题中均假定  $f'(x_0)$  存在, 按照导数定义观察下列极限, 指出  $A$  表示什么:

(1)  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = A$ ;

(2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A$ , 其中  $f(0) = 0$ , 且  $f'(0)$  存在;

(3)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h} = A$ ;

(4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right) - f(x_0) \right] = A$ .

解 (1) 因为  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f[x_0 + (-\Delta x)] - f(x_0)}{-\Delta x} = -f'(x_0)$ , 所以  $A = -f'(x_0)$ .

$-f'(x_0)$ .

(2) 因为  $f(0)=0$ , 于是  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = A$ .

(3) 因为  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x_0+h)-f(x_0)] - [f(x_0-h)-f(x_0)]}{h}$   

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} + \lim_{-h \rightarrow 0} \frac{f[x_0+(-h)]-f(x_0)}{-h}$$
  

$$= f'(x_0) + f'(x_0) = 2f'(x_0),$$

所以  $A=2f'(x_0)$ .

(4)  $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right) - f(x_0)}{\frac{1}{n}} = f'(x_0)$ .

3. 如果  $f(x)$  为偶函数, 且  $f'(0)$  存在, 证明  $f'(0)=0$ .

证明 因为  $f'(0)$  存在, 所以  $f'(0) = f'_+(0) = f'_-(0)$ , 而

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \stackrel{x=-t}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(-t)-f(0)}{-t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)-f(0)}{-t} = -f'_+(0) = -f'(0),$$

所以  $f'(0) = -f'(0)$ , 故  $f'(0)=0$ .

4. 若  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq c, \\ ax+b, & x > c, \end{cases}$  其中  $c$  为常数, 试确定  $a$  和  $b$ , 使得  $f'(c)$  存在.

解 要  $f'(c)$  存在, 必须  $f(x)$  在点  $x=c$  处连续, 即  $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = f(c)$ , 亦即

$$\lim_{x \rightarrow c^-} x^2 = c^2 = \lim_{x \rightarrow c^+} (ax+b) = ac+b.$$

又

$$f'_-(c) = \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{x^2-c^2}{x-c} = 2c, \quad f'_+(c) = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{ax+b-(ac+b)}{x-c} = a.$$

由  $f'_+(c) = f'_-(c)$  得  $a=2c$ , 从而  $b=-c^2$ , 即当  $a=2c, b=-c^2$  时  $f'(c)$  存在.

5. 设函数  $f(x)$  在  $x=2$  处连续, 且  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 3$ , 求  $f'(2)$ .

解 由于极限  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 3$  存在, 故有  $f(2)=0$ , 所以  $f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 3$ .

6. 求下列函数  $f(x)$  的  $f'_-(0)$  和  $f'_+(0)$ , 并问  $f'(0)$  是否存在?

(1)  $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0, \\ \ln(1+x), & x \geq 0; \end{cases}$  (2)  $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

解 (1)  $f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x - 0}{x-0} = 1,$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)-0}{x-0} = 1,$$

故有  $f'(0)=1$ .

$$(2) f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} - 0}{x-0} = 1,$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} - 0}{x-0} = 0,$$

故有  $f'(0)$  不存在.



注  $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = +\infty$ .

7. 求曲线  $y = \frac{x^5 + 1}{x^4 + 1}$ ,  $x_0 = 1$  在横坐标为  $x_0$  点的切线方程和法线方程.

解 切点为  $(1, 1)$ , 斜率为  $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 + 1}{x^4 + 1} \cdot \frac{1}{x - 1} = \frac{1}{2}$ , 故切线方程为  $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ ;

法线方程为  $y = -2x + 3$ .

注 本题的  $f'(1)$  用定义求比较好.

8. 在抛物线  $y = x^2$  上取横坐标为  $x_1 = 1$  和  $x_2 = 3$  的两点, 作过这两点的割线, 问该抛物线上哪一点的切线可平行于这割线?

解 割线与切线平行, 则割线的斜率等于切线的斜率.

割线的斜率  $k_1 = \frac{3^2 - 1^2}{3 - 1} = 4$ , 切线的斜率  $k_2 = y' = 2x$ , 由  $k_1 = k_2 = 4$ , 得  $x = 2$ , 故抛物线上  $(2, 4)$  的切线可平行于这割线, 即抛物线上  $(2, 4)$  点处的切线平行于割线.

### 提高题

1. 若  $f(x)$  在  $x = a$  可导, 且  $f(a) \neq 0$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{f(a + \frac{1}{n})}{f(a)} \right)^n$ . (2016 年全国预赛题)

解 本题属于  $1^\infty$  型未定式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{f(a + \frac{1}{n})}{f(a)} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \ln \left( \frac{f(a + \frac{1}{n})}{f(a)} \right)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ \frac{f(a + \frac{1}{n})}{f(a)} - 1 \right]} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(a + \frac{1}{n}) - f(a)}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{f(a)}} = e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}.$$

2. 若  $f(1) = 0$ ,  $f'(1)$  存在, 求极限  $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin^2 x + \cos x) \tan 3x}{(e^{x^2} - 1) \sin x}$ .

$$\begin{aligned} \text{解 } I &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin^2 x + \cos x) \tan 3x}{(e^{x^2} - 1) \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin^2 x + \cos x) \cdot 3x}{x^2 \cdot x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin^2 x + \cos x)}{x^2} \\ &= 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin^2 x + \cos x) - f(1)}{\sin^2 x + \cos x - 1} \cdot \frac{\sin^2 x + \cos x - 1}{x^2} \\ &= 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin^2 x + \cos x) - f(1)}{\sin^2 x + \cos x - 1} \cdot \frac{x^2 - \frac{1}{2}x^2}{x^2} \\ &= 3f'(1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}f'(1). \end{aligned}$$

3. 设  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内有定义, 对任意  $x$  都有  $f(x+1) = 2f(x)$ , 且当  $0 \leq x \leq 1$  时,  $f(x) = x(1-x^2)$ , 试判断  $f(x)$  在  $x=0$  处是否可导.

解 当  $-1 \leq x \leq 0$  时,  $0 \leq x+1 \leq 1$ , 则

$$f(x) = \frac{1}{2}f(x+1) = \frac{1}{2}(x+1)[1 - (x+1)^2] = \frac{1}{2}(x+1)(-x^2 - 2x).$$

故

$$f(x) = \begin{cases} x(1-x^2), & 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{2}(x+1)(-x^2 - 2x), & -1 \leq x < 0. \end{cases}$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{2}(x+1)(-x^2 - 2x) - 0}{x} = -1,$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(1-x^2) - 0}{x} = 1,$$

$f'(0) \neq f'_+(0)$ , 故  $f'(0)$  不存在.

4. 已知  $\alpha, \beta$  为常数,  $f(x)$  可导, 求  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\alpha\Delta x) - f(x-\beta\Delta x)}{\Delta x}$ .

解  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\alpha\Delta x) - f(x-\beta\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\alpha\Delta x) - f(x)}{\alpha\Delta x} \alpha + \frac{f(x-\beta\Delta x) - f(x)}{-\beta\Delta x} \beta = (\alpha + \beta)f'(x)$ .

5. 已知  $f(x) = x(2x-1)(3x-2) \cdots (100x-99)$ , 求  $f'(0)$ .

解  $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(2x-1)(3x-2) \cdots (100x-99) - 0}{x - 0}$   
 $= (-1)(-2) \cdots (-99) = -99!$ .

6. 设函数  $f(x)$  在  $x=0$  处连续, 且  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h^2)}{h^2} = 1$ , 则( ).

A.  $f(0)=0$  且  $f'_-(0)$  存在

B.  $f(0)=1$  且  $f'_-(0)$  存在

C.  $f(0)=0$  且  $f'_+(0)$  存在

D.  $f(0)=1$  且  $f'_+(0)$  存在

解  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h^2)}{h^2} = 1$  只能说明  $f(0)=0, f'_+(0)=1$ , 故选 C.

7. 设函数  $f(x)$  连续, 且  $f'(0) > 0$ , 则存在  $\delta > 0$ , 使得( ).

A.  $f(x)$  在  $(0, \delta)$  内单调增加

B.  $f(x)$  在  $(-\delta, 0)$  内单调减少

C. 对任意的  $x \in (0, \delta)$  有  $f(x) > f(0)$

D. 对任意的  $x \in (-\delta, 0)$  有  $f(x) > f(0)$

解  $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} > 0$ , 则存在  $\delta > 0$ , 对任意的  $x \in (-\delta, 0)$  有  $f(x) < f(0)$ , 对任意的  $x \in (0, \delta)$  有  $f(x) > f(0)$ , 故选 C.

8. 设函数  $f(x)$  在  $x=0$  处可导,  $f'(0)=1$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-2x)}{\tan x} =$  \_\_\_\_\_.

解  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \cdot \frac{x}{\tan x} + \frac{f(-2x) - f(0)}{-2x} \cdot \frac{2x}{\tan x} \right) = f'(0) + 2f'(0) = 3f'(0) = 3$ .

## 习题 2.2

1. 求下列函数的导数:

$$(1) y = x^3 + \frac{5}{x^4} - \frac{1}{x} + 10;$$

$$(2) y = 4x^5 - 2^x + 3e^x;$$

$$(3) y = \tan x - 2\sec x + 3;$$

$$(4) y = \sin x \cdot \cos x;$$

$$(5) y = x \ln x - x^2;$$

$$(6) y = 3e^x \cos x;$$

$$(7) y = \frac{e^x}{x^2} + \ln 2;$$

$$(8) y = \frac{1 - \cos x}{\sin x};$$

$$(9) y = x(x+1)\tan x.$$

解 (1)  $y' = 3x^2 - \frac{20}{x^5} + \frac{1}{x^2};$

(2)  $y' = 20x^4 - 2^x \ln 2 + 3e^x;$

(3)  $y' = \sec^2 x - 2\sec x \tan x;$

(4)  $y' = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x;$

(5)  $y' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 2x = \ln x - 2x + 1;$

(6)  $y' = 3e^x (\cos x - \sin x);$

(7)  $y' = e^x \left( \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right);$

(8)  $y' = \frac{\sin^2 x - (1 - \cos x) \cos x}{\sin^2 x} = \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x};$

(9)  $y' = (x+1)\tan x + x\tan x + x(x+1)\sec^2 x.$



2. 求下列函数的导数:

$$(1) y = \sin x - \cos x, \text{ 求 } y'|_{x=\frac{\pi}{6}} \text{ 和 } y'|_{x=\frac{\pi}{4}}; \quad (2) \rho = \theta \sin \theta + \frac{1}{2} \cos \theta, \text{ 求 } \left. \frac{d\rho}{d\theta} \right|_{\theta=\frac{\pi}{4}}.$$

解 (1)  $y' = \cos x + \sin x$ , 故

$$y'|_{x=\frac{\pi}{6}} = \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}, \quad y'|_{x=\frac{\pi}{4}} = \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

$$(2) \frac{d\rho}{d\theta} = \sin \theta + \theta \cos \theta - \frac{1}{2} \sin \theta = \frac{1}{2} \sin \theta + \theta \cos \theta, \quad \left. \frac{d\rho}{d\theta} \right|_{\theta=\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \left( 1 + \frac{\pi}{2} \right).$$

3. 求下列函数的导数:

$$(1) y = (2x+5)^4; \quad (2) y = \cos(4-3x); \quad (3) y = e^{-3x^2}; \quad (4) y = \ln(1+x^2);$$

$$(5) y = \sin^2 x; \quad (6) y = \arctan(e^x); \quad (7) y = (\arcsin x)^2; \quad (8) y = \ln \cos x.$$

解 (1)  $y' = 4(2x+5)^3 \cdot 2 = 8(2x+5)^3$ ;

$$(2) y' = -\sin(4-3x) \cdot (-3) = 3\sin(4-3x);$$

$$(3) y' = e^{-3x^2} \cdot (-6x) = -6xe^{-3x^2};$$

$$(4) y' = \frac{2x}{1+x^2};$$

$$(5) y' = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x;$$

$$(6) y' = \frac{1}{1+(e^x)^2} \cdot e^x = \frac{e^x}{1+e^{2x}};$$

$$(7) y' = 2\arcsin x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(8) y' = \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = -\tan x.$$

4. 求下列函数的导数:

$$(1) y = \arcsin(2x+5); \quad (2) y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad (3) y = e^{-3x^2} \cos 2x;$$

$$(4) y = \ln(1+x^2); \quad (5) y = \arcsin \sqrt{x}; \quad (6) y = \ln(x + \sqrt{a^2+x^2});$$

$$(7) y = \ln(\sec x + \tan x); \quad (8) y = \ln(\csc x + \cot x).$$

$$\text{解 (1)} y' = \frac{1}{\sqrt{1-(2x+5)^2}} \cdot 2;$$

$$(2) y = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}; \quad y' = -\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2x) = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}};$$

$$(3) y' = e^{-3x^2} \cdot (-6x) \cos 2x + e^{-3x^2} \cdot (-\sin 2x) \cdot 2 = -2e^{-3x^2} (3x \cos 2x + \sin 2x);$$

$$(4) y' = \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x;$$

$$(5) y' = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$(6) y' = \frac{1}{x + \sqrt{a^2+x^2}} \cdot \left( 1 + \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}};$$

$$(7) y' = \frac{1}{\sec x + \tan x} (\sec x \cdot \tan x + \sec^2 x) = \sec x;$$

$$(8) y' = \frac{1}{\csc x + \cot x} (-\csc x \cdot \cot x - \csc^2 x) = -\csc x.$$

5. 求下列函数的导数:

$$(1) y = e^{\tan \frac{1}{x}}; \quad (2) y = \ln \tan 2x; \quad (3) y = e^{\arctan \sqrt{x}}; \quad (4) y = \ln \ln \ln x;$$

(5)  $y = \sin^2 x \cdot \sin x^2$ ; (6)  $y = \sqrt{x+\sqrt{x}}$ ; (7)  $y = \arccos \sqrt{1-3x} \cdot 2^{-\frac{1}{x}}$ ; (8)  $y = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ , 求  $y'|_{x=2}$ .

解 (1)  $y' = e^{\tan \frac{1}{x}} \cdot \sec^2 \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$ ;

(2)  $y' = \frac{1}{\tan 2x} \cdot \sec^2 2x \cdot 2$ ;

(3)  $y' = e^{\arctan \sqrt{x}} \cdot \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = e^{\arctan \sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$ ;

(4)  $y' = \frac{1}{\ln \ln x} \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}$ ;

(5)  $y' = 2 \sin x \cdot \cos x \cdot \sin x^2 + \sin^2 x \cdot \cos x^2 \cdot 2x$ ;

(6)  $y' = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$ ;

(7)  $y' = \frac{1}{\sqrt{1-(1-3x)}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-3x}} \cdot (-3) - 2^{-\frac{1}{x}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{1}{x^2}$   
 $= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-3x}} - 2^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \ln 2$ ;

(8)  $y' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}} \cdot \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2}$ ,  $y'|_{x=2} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ .

6. 设  $f(x) = (ax+b)\sin x + (cx+d)\cos x$ , 确定  $a, b, c, d$  使  $f'(x) = x \cos x$ .

解  $f'(x) = a \sin x + (ax+b)\cos x + c \cos x - (cx+d)\sin x = (a-cx-d)\sin x + (ax+b+c)\cos x = x \cos x$ ,  
 则有  $a-d=0, c=0, a=1, b+c=0$ , 即  $a=1, b=c=0, d=1$ .

7. 求垂直于直线  $2x-6y+1=0$ , 且与曲线  $y=x^3-3x^2-5$  相切的直线方程.

解 直线  $2x-6y+1=0$  的斜率为  $k=\frac{1}{3}$ , 则所求切线的斜率为  $-3$ . 由  $y'=3x^2-6x=-3$ , 解得  $x=1$ ,  
 $y=-7$ , 所求直线方程为  $y+7=-3(x-1)$ .

8. 设  $y=f\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)$ , 又  $f'(x)=\arctan x^2$ , 求  $\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=0}$ .

解  $\frac{dy}{dx} = f'\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right) \cdot \frac{3(3x+2)-3(3x-2)}{(3x+2)^2} = f'\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right) \cdot \frac{12}{(3x+2)^2} = \arctan\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)^2 \cdot \frac{12}{(3x+2)^2}$ ,  
 $\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=0} = \arctan\left(\frac{0-2}{0+2}\right)^2 \times \frac{12}{(0+2)^2} = \frac{\pi}{4} \times 3 = \frac{3\pi}{4}$ .

9. 求  $\frac{d(\sin x^2)}{dx}, \frac{d^2(\sin x^2)}{dx^2}$ .

解  $\frac{d(\sin x^2)}{dx} = \frac{d(\sin x^2)}{d(x^2)} \cdot \frac{d(x^2)}{dx} = 2x \cos x^2$ .

$\frac{d^2(\sin x^2)}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{d \sin x^2}{dx} \right) = \frac{d}{dx} (2x \cos x^2) = 2 \cos x^2 - 4x^2 \sin x^2$ .

### 提高题

1. 设  $y = x^{\sin x}, x > 0$ , 求  $\frac{dy}{dx}$ .

解  $y = e^{\sin x \ln x}, \frac{dy}{dx} = e^{\sin x \ln x} \left[ \cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right]$ .



2. 设  $f(x)$  可导, 求下列函数的导数  $\frac{dy}{dx}$ :

(1)  $y = f(x^2)$ ; (2)  $y = f(\sin^2 x) + f(\cos^2 x)$ .

解 (1)  $\frac{dy}{dx} = 2xf'(x^2)$ ;

(2)  $\frac{dy}{dx} = f'(\sin^2 x) \cdot 2\sin x \cos x + f'(\cos^2 x) \cdot (-2\sin x \cos x) = \sin 2x [f'(\sin^2 x) - f'(\cos^2 x)]$ .

3. 求  $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$  的导数.

解  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} \left[ 1 + \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} \left( 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \right]$ .

4. 求函数  $y = f^n(\varphi^n(\sin x^n))$  的导数, 其中  $f, \varphi$  均可导.

解  $\frac{dy}{dx} = n f^{n-1}(\varphi^n(\sin x^n)) f'(\varphi^n(\sin x^n)) \cdot n \varphi^{n-1}(\sin x^n) \varphi'(\sin x^n) \cdot \cos x^n \cdot n x^{n-1}$ .

5. 验证  $(\sqrt{x^2 - a^2})'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ ,  $(\sqrt{a^2 - x^2})'_x = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$  并记住.

解 答略.

### 习题 2.3

1. 求下列函数的二阶导数:

(1)  $y = 2x^2 + \ln x$ ; (2)  $y = e^{2x-1}$ ; (3)  $y = x \cos x$ ;  
(4)  $y = e^{-t} \sin t$ ; (5)  $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ ; (6)  $y = (1+x^2) \arctan x$ .

解 (1)  $y' = 4x + \frac{1}{x}$ ,  $y'' = 4 - \frac{1}{x^2}$ ;

(2)  $y' = 2e^{2x-1}$ ,  $y'' = 4e^{2x-1}$ ;

(3)  $y' = \cos x - x \sin x$ ;  $y'' = -\sin x - \sin x - x \cos x = -2\sin x - x \cos x$ ;

(4)  $y' = -e^{-t} \sin t + e^{-t} \cos t = e^{-t} (\cos t - \sin t)$ ,

$y'' = e^{-t} (\cos t - \sin t) + e^{-t} (-\sin t - \cos t) = e^{-t} (-2\cos t) = -2e^{-t} \cos t$ ;

(5)  $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + x \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}} \cdot (-2x) = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}} = (1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$ ,

$y'' = \frac{3}{2} \cdot (1-x^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot (-2x) = \frac{3x}{\sqrt{(1-x^2)^5}}$ ;

(6)  $y' = 2x \arctan x + 1$ ,  $y'' = 2 \arctan x + \frac{2x}{1+x^2}$ .

2. 设  $y = f[x\varphi(x)]$ , 其中  $f, \varphi$  具有二阶导数, 求  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ .

解  $\frac{dy}{dx} = f'(x\varphi(x))(\varphi(x) + x\varphi'(x))$ ,

$\frac{d^2 y}{dx^2} = f''(x\varphi(x))(\varphi(x) + x\varphi'(x))^2 + f'(x\varphi(x))(2\varphi'(x) + x\varphi''(x))$ .

3. 设  $f(x) = (x-a)^3 \varphi(x)$ , 其中  $\varphi(x)$  有二阶连续导数, 问  $f'''(a)$  是否存在; 若不存在, 请说明理由; 若存在, 求出其值.

解  $f'(x) = 3(x-a)^2 \varphi(x) + (x-a)^3 \varphi'(x)$ ,

$f''(x) = 6(x-a)\varphi(x) + 6(x-a)^2 \varphi'(x) + (x-a)^3 \varphi''(x)$ ,

$f'''(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x) - f''(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{6(x-a)\varphi(x) + 6(x-a)^2 \varphi'(x) + (x-a)^3 \varphi''(x) - 0}{x - a} = 6\varphi(a)$ .

4. 问自然数  $n$  至少多大, 才能使

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

在  $x=0$  处二阶可导, 并求  $f''(0)$ .

$$\text{解 } f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{n-1} \sin \frac{1}{x},$$

要使上式极限存在, 则要求  $n-1 > 0$ , 即  $n > 1$ , 且  $f'(0) = 0$ .

当  $x \neq 0$  时,  $f'(x) = nx^{n-1} \sin \frac{1}{x} - x^{n-2} \cos \frac{1}{x}$ , 于是

$$f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{nx^{n-1} \sin \frac{1}{x} - x^{n-2} \cos \frac{1}{x}}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( nx^{n-2} \sin \frac{1}{x} - x^{n-3} \cos \frac{1}{x} \right),$$

$f''(0)$  存在的话只能为 0, 上式极限存在要求  $n-3 > 0$ , 即  $n > 3$ . 故当  $n > 3$  时,  $f''(0)$  存在, 且  $f''(0) = 0$ .

5. 求下列函数的  $n$  阶导数:

$$(1) y = \sin^2 x; \quad (2) y = x \ln x; \quad (3) y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}; \quad (4) y = xe^x.$$

$$\text{解 } (1) y = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x, \quad y^{(n)} = -\frac{1}{2} \cdot 2^n \cdot \cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right) = -2^{n-1} \cdot \cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

$$(2) y = \ln x + 1, \quad y' = \frac{1}{x} = x^{-1}, \quad y'' = (-1)x^{-2}, \quad y''' = (-1) \cdot (-2)x^{-3} = (-1)^2 \cdot 2! \cdot x^{-3}, \dots, \\ y^{(n)} = (-1)^{(n-1)} \cdot (n-1)! \cdot x^{-n}.$$

$$(3) y = \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}, \quad y' = (-1)[(x-2)^{-2} - (x-1)^{-2}], \quad y'' = (-1)(-2)[(x-2)^{-3} - (x-1)^{-3}], \dots, \\ y^{(n)} = (-1)^n \cdot n! [(x-2)^{-(n+1)} - (x-1)^{-(n+1)}].$$

$$(4) y' = e^x + xe^x = e^x(1+x), \quad y'' = e^x(1+x) + e^x = e^x(2+x), \dots, y^{(n)} = e^x(n+x).$$

6. 求下列函数指定阶的导数:

$$(1) y = x^2 \sin 3x, \text{ 求 } y^{(50)}; \quad (2) y = e^x \cos x, \text{ 求 } y^{(4)}.$$

$$\text{解 } (1) y^{(50)} = \sum_{k=0}^{50} C_{50}^k (x^2)^{(k)} \cdot (\sin 3x)^{(50-k)} \\ = C_{50}^0 x^2 \cdot 3^{50} \cdot \sin\left(3x + 50 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + C_{50}^1 \cdot 2x \cdot 3^{49} \cdot \sin\left(3x + 49 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \\ C_{50}^2 \cdot 2 \cdot 3^{48} \cdot \sin\left(3x + 48 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \\ = x^2 \cdot 3^{50} \cdot \sin\left(3x + 50 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + 50 \cdot 2x \cdot 3^{49} \cdot \sin\left(3x + 49 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \\ \frac{50 \times 49}{2} \cdot 2 \times 3^{48} \cdot \sin\left(3x + 48 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \\ = -3^{50} \cdot x^2 \sin 3x + 3^{49} \cdot 100x \cdot \cos 3x + 3^{48} \cdot 50 \times 49 \sin 3x \\ = 3^{48} (-9x^2 \sin 3x + 300x \cos 3x + 2450 \sin 3x);$$

$$(2) y^{(4)} = \sum_{k=0}^4 C_4^k (e^x)^{(k)} (\cos x)^{(4-k)} \\ = e^x \cos\left(x + 4 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + C_4^2 \cdot e^x \cos\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + e^x \cos x - 4e^x \cos x.$$

### 提高题

$$1. f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x, \text{ 求 } f^{(n)}(x).$$



解  $y = \sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$

$$= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{1 - \cos 4x}{2} \right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x,$$

$$y' = \frac{1}{4} (-\sin 4x) \cdot 4 = -\sin 4x, \quad y'' = -4 \cos \left( 4x + 2 \cdot \frac{\pi}{2} \right), \dots$$

所以  $y^{(n)} = 4^{n-1} \cos \left( 4x + n \cdot \frac{\pi}{2} \right)$ .

2.  $f'(x) = 2f(x)$ ,  $f(0) = 1$ , 求  $f^{(n)}(0)$ .

解  $f'(x) = 2f(x)$ ,  $f''(x) = 2f'(x) = 2 \cdot 2f(x)$ ,

$$f'''(x) = 2^2 f'(x) = 2^3 f(x), \dots, f^{(n)}(x) = 2^n f(x), \text{ 故 } f^{(n)}(0) = 2^n f(0) = 2^n.$$

3.  $f'(x) = e^{f(x)}$ ,  $f(0) = 1$ , 求  $f^{(n)}(0)$ .

解  $f'(x) = e^{f(x)}$ ,  $f''(x) = e^{f(x)} \cdot f'(x) = e^{f(x)} \cdot e^{f(x)} = e^{2f(x)}$ ,

$$f'''(x) = e^{2f(x)} \cdot 2f'(x) = 2e^{3f(x)}, \quad f^{(4)}(x) = 2e^{3f(x)} \cdot 3f'(x) = 3! \cdot e^{3f(x)} \cdot e^{f(x)} = 3! \cdot e^{4f(x)}, \dots,$$

$$f^{(n)}(x) = (n-1)! \cdot e^{nf(x)}, \text{ 故 } f^{(n)}(0) = (n-1)! \cdot e^n.$$

4. 设  $y$  的  $n-2$  阶导数  $y^{(n-2)} = \frac{x}{\ln x}$ , 求  $y$  的  $n$  阶导数  $y^{(n)}$ .

$$\text{解 } y^{(n-2)} = \frac{x}{\ln x}, \quad y^{(n-1)} = [y^{(n-2)}]' = \left( \frac{x}{\ln x} \right)' = \frac{\ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x},$$

$$y^{(n)} = [y^{(n-1)}]' = \left( \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} \right)' = \frac{\frac{1}{x} \cdot \ln^2 x - (\ln x - 1) \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^4 x} = \frac{2 - \ln x}{x \ln^3 x}.$$

5. 设  $y = f(x^2 + b)$ , 其中  $b$  为常数,  $f$  存在二阶导数, 求  $y''$ .

解  $y' = f'(x^2 + b) \cdot 2x$ ,  $y'' = f''(x^2 + b) \cdot (2x)^2 + 2f'(x^2 + b) = f''(x^2 + b) \cdot 4x^2 + 2f'(x^2 + b)$ .

6. 设函数  $y = \frac{1}{2x+3}$ , 求  $y^{(n)}(0)$ .

解  $y' = (-1)(2x+3)^{-2} \cdot 2$ ,  $y'' = (-1)(-2)(2x+3)^{-3} \cdot 2^2, \dots$ ,

$$y^{(n)} = (-1)(-2) \cdot \dots \cdot (-n)(2x+3)^{-(n+1)} \cdot 2^n = (-1)^n n! (2x+3)^{-(n+1)} \cdot 2^n,$$

$$y^{(n)}(0) = (-1)^n n! \cdot 3^{-(n+1)} \cdot 2^n.$$

## 习题 2.4

1. 求下列方程确定的隐函数的导数:

(1)  $y^2 + 2xy + 9 = 0$ ;

(2)  $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ ;

(3)  $xy = \sin(x+y)$ ;

(4)  $y = 1 - xe^y$ .

解 (1) 两边关于  $x$  求导  $2yy' + 2y + 2xy' = 0$ , 即  $(y+x)y' = -y$ , 故  $y' = -\frac{y}{y+x}$ .

(2) 两边关于  $x$  求导  $3x^2 + 3y^2 \cdot y' - 3ay - 3axy' = 0$ , 即  $(3y^2 - 3ax)y' = 3ay - 3x^2$ , 故  $y' = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$ .

(3) 两边关于  $x$  求导  $y + xy' = \cos(x+y) \cdot (1+y')$ , 即  $(x - \cos(x+y))y' = \cos(x+y) - y$ , 故  $y' = \frac{\cos(x+y) - y}{x - \cos(x+y)}$ .

(4) 两边关于  $x$  求导  $y' = -e^y - xe^y \cdot y'$ , 即  $(1 + xe^y)y' = -e^y$ , 故  $y' = -\frac{e^y}{1 + xe^y}$ .

2. 设  $\arctan \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ , 求  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ .

解  $\arctan \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$ . 两边关于  $x$  求导

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{xy' - y}{x^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + y^2} (2x + 2yy'), \text{ 即 } xy' - y = x + y \cdot y',$$

于是  $(x-y)y' = x+y$ , 故  $y' = \frac{x+y}{x-y}$ .

对方程  $xy' - y = x + y \cdot y'$  两边关于  $x$  求导得

$$y' + xy'' - y' = 1 + y'^2 + y \cdot y'', \text{ 故 } y'' = \frac{1+y'^2}{x-y} = \frac{(x-y)^2 + (x+y)^2}{(x-y)^3} = \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}.$$

3. 设  $xy - \ln y = 0$ , 求  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}$ ,  $\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=0}$ .

解 取  $x=0$ , 得  $y=1$ . 两边关于  $x$  求导

$$y + xy' - \frac{1}{y}y' = 0, \text{ 故 } y' = \frac{y^2}{1-xy}, \quad y'|_{x=0} = y'|_{y=1} = 1.$$

$$y'' = \frac{2yy'(1-xy) - y^2(-y-xy')}{(1-xy)^2}, \quad y''|_{x=0} = y''|_{y=1} = \frac{2+1}{1} = 3.$$

4. 求下列函数的导数:

$$(1) y = (1+x^2)^{\sin x}; \quad (2) y = \left(\frac{x}{1+x}\right)^x;$$

$$(3) y = \frac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}; \quad (4) y = \sqrt{x \sin x} \sqrt{1-e^x}.$$

解 (1) 两边取自然对数, 得  $\ln y = \sin x \ln(1+x^2)$ .

$$\frac{1}{y}y' = \cos x \ln(1+x^2) + \sin x \cdot \frac{2x}{1+x^2}, \text{ 故 } y' = (1+x^2)^{\sin x} \left[ \cos x \ln(1+x^2) + \sin x \cdot \frac{2x}{1+x^2} \right].$$

(2) 两边取自然对数, 得  $\ln y = x [\ln |x| - \ln |1+x|]$ .

$$\frac{1}{y}y' = \ln \left| \frac{x}{1+x} \right| - x \left[ \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} \right], \text{ 故 } y' = \left(\frac{x}{1+x}\right)^x \left[ \ln \left| \frac{x}{1+x} \right| - \frac{1}{1+x} \right].$$

(3) 两边取自然对数, 得

$$\ln y = \frac{1}{2} \ln |x+2| + 4 \ln |3-x| - 5 \ln |x+1|,$$

$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+2} - \frac{4}{3-x} - \frac{5}{x+1}, \text{ 故 } y' = \frac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5} \left( \frac{1}{2x+4} - \frac{4}{3-x} - \frac{5}{x+1} \right).$$

(4) 两边取自然对数, 得

$$\ln y = \frac{1}{2} \left( \ln |x| + \ln |\sin x| + \frac{1}{2} \ln |1-e^x| \right),$$

$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x} + \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{-e^x}{1-e^x} \right), \text{ 故 } y' = \frac{1}{2} \sqrt{x \sin x} \sqrt{1-e^x} \left( \frac{1}{x} + \cot x - \frac{e^x}{2(1-e^x)} \right).$$

5. 求下列函数的导数:

$$(1) \begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos 2t, \end{cases} \text{ 求 } \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\frac{\pi}{4}}; \quad (2) \text{ 设 } x = a \ln \cot \theta, y = \tan \theta, \text{ 求 } \frac{dy}{dx} \text{ 与 } \frac{d^2y}{dx^2}.$$

(3) 设  $x = f'(t)$ ,  $y = tf'(t) - f(t)$ , 又  $f''(t)$  存在且不为零, 求  $\frac{dy}{dx}$  与  $\frac{d^2y}{dx^2}$ .

解 (1)  $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-2 \sin 2t}{\cos t} = -4 \sin t, \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -2\sqrt{2}.$

$$(2) \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\sec^2 \theta}{a \cdot \frac{1}{\cot \theta} (-\csc^2 \theta)} = \frac{1}{a} \tan \theta,$$



$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{d\theta}{dx} = \frac{\left( -\frac{1}{a} \tan \theta \right)'}{x'_\theta} = \frac{-\frac{1}{a} \cdot \sec^2 \theta}{a \cdot \frac{1}{\cot \theta} \cdot (-\csc^2 \theta)} = -\frac{1}{a^2} \tan \theta.$$

$$(3) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{f'(t) + t f''(t) - f'(t)}{f''(t)} = t, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt} \left( \frac{dy}{dx} \right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{(t)'}{f''(t)} = \frac{1}{f''(t)}.$$

### 提高题

1. 设函数  $y=y(x)$  由参数方程  $\begin{cases} x=t+e^t, \\ y=\sin t \end{cases}$  确定, 则  $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=0} =$  \_\_\_\_\_.

解  $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos t}{1+e^t}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt} \left( \frac{\cos t}{1+e^t} \right)}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{(1+e^t)\sin t + e^t \cos t}{(1+e^t)^3},$  所以  $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=0} = -\frac{1}{8}.$

2. 设函数  $y=f(x)$  由方程  $\cos(xy) + \ln y - x = 1$  确定, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( f\left(\frac{2}{n}\right) - 1 \right) =$  \_\_\_\_\_.

解 将  $x=0$  代入方程得  $y=1$ . 在  $\cos(xy) + \ln y - x = 1$  两边关于  $x$  求导, 得

$$-\sin(xy) \cdot (y + xy') + \frac{1}{y} y' - 1 = 0.$$

将  $x=0, y=1$  代入上式, 得

$$\sin 0 \cdot (1+0) + \frac{1}{1} y' - 1 = 0, \text{ 故 } y' = 1, \text{ 即 } y'(0) = f'(0) = 1.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( f\left(\frac{2}{n}\right) - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \frac{f\left(\frac{2}{n}\right) - f(0)}{\frac{2}{n}} = 2f'(0) = 2.$$

3. 曲线  $L$  的极坐标方程为  $r=\theta$ , 求  $L$  在点  $(r, \theta) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  处的切线方程.

解 先把曲线方程化为参数方程

$$\begin{cases} x=r(\theta)\cos\theta=\theta\cos\theta, \\ y=r(\theta)\sin\theta=\theta\sin\theta, \end{cases}$$

于是在  $\theta = \frac{\pi}{2}$  处,  $x=0, y=\frac{\pi}{2}, \left. \frac{dy}{dx} \right|_{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin\theta + \theta\cos\theta}{\cos\theta - \theta\sin\theta} \bigg|_{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi}$ , 则  $L$  在点  $(r, \theta) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  处的切线方程为

$$y - \frac{\pi}{2} = -\frac{2}{\pi}(x-0), \text{ 即 } y = -\frac{2}{\pi}x + \frac{\pi}{2}.$$

4. 求曲线  $\tan\left(x+y+\frac{\pi}{4}\right) = e^y$  在点  $(0,0)$  处的切线方程.

解 方程两边关于  $x$  求导得  $\sec^2\left(x+y+\frac{\pi}{4}\right) \cdot (1+y') = e^y \cdot y'.$

将  $x=0, y=0$  代入上式得  $(\sqrt{2})^2(1+y') = y'$ , 故  $y' = -2$ , 即  $y'(0) = -2$ . 所以切线方程为  $y = -2x$ .

5. 设函数  $y=y(x)$  是由方程  $x^2+y=\tan(x-y)$  所确定且满足  $y(0)=0$ , 求  $y''(0)$ .

解 在方程  $x^2+y=\tan(x-y)$  中关于  $x$  求导

$$2x + y' = \sec^2(x-y) \cdot (1-y'). \quad (1)$$

将  $x=0, y=0$  代入上式得  $y' = \frac{1}{2}$ . 在 (1) 式两边关于  $x$  求导, 得

$$2 + y'' = 2 \sec^2(x-y) \tan(x-y) \cdot (1-y')^2 + \sec^2(x-y)(-y'').$$

将  $x=0, y=0, y'=\frac{1}{2}$  代入上式, 得  $2+y''=0+(-y'')$ , 故得  $y''=-1$ , 即  $y''(0)=-1$ .

### 习题 2.5

1. 求函数  $y=x^2$  当  $x$  由 1 改变到 1.01 的微分.

解 因为  $dy=2xdx$ , 由题设条件知  $x=1, dx=\Delta x=1.01-1=0.01$ , 所以  $dy=2\times 1\times 0.01=0.02$ .

2. 求函数  $y=x^3$  在  $x=2$  处的微分.

解 函数  $y=x^3$  在  $x=2$  处的微分为  $dy=(x^3)'|_{x=2}dx=12dx$ .

3. 求下列函数的微分:

$$(1) y=x^3e^{2x};$$

$$(2) y=\frac{\sin x}{x};$$

$$(3) y=\sin(2x+1);$$

$$(4) y=\ln(1+e^{x^2});$$

$$(5) y=\ln(x+\sqrt{x^2+1});$$

$$(6) y=\frac{e^{2x}}{x^2}.$$

解 (1)  $y'=(x^3e^{2x})'=3x^2e^{2x}+2x^3e^{2x}=x^2e^{2x}(3+2x)$ ,  $dy=y'dx=x^2e^{2x}(3+2x)dx$ .

或利用微分形式不变性

$$dy=e^{2x}d(x^3)+x^3d(e^{2x})=e^{2x}\cdot 3x^2dx+x^3\cdot 2e^{2x}dx=x^2e^{2x}(3+2x)dx.$$

(2) 因为  $y'=\left(\frac{\sin x}{x}\right)'=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$ , 所以  $dy=y'dx=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}dx$ .

(3) 设  $y=\sin u, u=2x+1$ , 则

$$dy=d(\sin u)=\cos u du=\cos(2x+1)d(2x+1)=\cos(2x+1)\cdot 2dx=2\cos(2x+1)dx.$$

注 与复合函数求导类似, 求复合函数的微分也可不写出中间变量, 这样更加直接和方便.

$$(4) dy=d\ln(1+e^{x^2})=\frac{1}{1+e^{x^2}}d(1+e^{x^2})=\frac{1}{1+e^{x^2}}e^{x^2}d(x^2)=\frac{e^{x^2}}{1+e^{x^2}}2xdx=\frac{2xe^{x^2}}{1+e^{x^2}}dx.$$

$$(5) dy=d\ln(x+\sqrt{x^2+1})=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}d(x+\sqrt{x^2+1})=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx.$$

$$(6) dy=\frac{x^2d(e^{2x})-e^{2x}d(x^2)}{(x^2)^2}=\frac{x^2e^{2x}\cdot 2dx-e^{2x}\cdot 2xdx}{x^4}=\frac{2e^{2x}(x-1)}{x^3}dx.$$

4. 在下列等式的括号中填入适当的函数, 使等式成立:

$$(1) d(\quad)=\cos\omega t dt;$$

$$(2) d(\sin x^2)=(\quad)d(\sqrt{x}).$$

解 (1)  $d(\sin\omega t)=\omega\cos\omega t dt$ ,  $\cos\omega t dt=\frac{1}{\omega}d(\sin\omega t)=d\left(\frac{1}{\omega}\sin\omega t\right)$ ;

一般地, 有  $d\left(\frac{1}{\omega}\sin\omega t+C\right)=\cos\omega t dt$ .

$$(2) \frac{d(\sin x^2)}{d(\sqrt{x})}=\frac{2x\cos x^2 dx}{\frac{1}{2\sqrt{x}}dx}=4x\sqrt{x}\cos x^2, \quad d(\sin x^2)=(4x\sqrt{x}\cos x^2)d(\sqrt{x}).$$

5. 求由方程  $e^{xy}=2x+y^3$  所确定的隐函数  $y=f(x)$  的微分  $dy$ .

解 对方程两边求微分, 得  $d(e^{xy})=d(2x+y^3)$ ,  $e^{xy}d(xy)=d(2x)+d(y^3)$ ,

$$e^{xy}(ydx+xdy)=2dx+3y^2dy, \quad \text{于是 } dy=\frac{2-ye^{xy}}{xe^{xy}-3y^2}dx.$$

6. 导出近似公式(当  $|\Delta x|$  远远小于  $|x|$  时):  $\sqrt[3]{x+\Delta x}\approx\sqrt[3]{x}+\frac{\Delta x}{3\sqrt[3]{x^2}}$ , 并按此公式求  $\sqrt[3]{25}$  的近似值,

结果取小数点后四位.

解 设  $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ ,  $f(x+\Delta x)=f(x)\approx f'(x)\Delta x$ ,  $f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ , 从而有



$\sqrt[3]{x+\Delta x} - \sqrt[3]{x} \approx \frac{\Delta x}{3\sqrt[3]{x^2}}$ , 移项得近似公式:  $\sqrt[3]{x+\Delta x} \approx \sqrt[3]{x} + \frac{\Delta x}{3\sqrt[3]{x^2}}$ .

因为  $\sqrt[3]{25} = \sqrt[3]{27-2} = 3\left(1-\frac{2}{27}\right)^{\frac{1}{3}}$ , 令  $x=1, \Delta x = -\frac{2}{27}$ , 则  $\left(1-\frac{2}{27}\right)^{\frac{1}{3}} \approx \sqrt[3]{1} + \frac{-\frac{2}{27}}{3\sqrt[3]{1}} = 1 - \frac{2}{81} = \frac{79}{81}$ , 所以

$$\sqrt[3]{25} \approx 3 \cdot \frac{79}{81} = \frac{79}{27} = 2.9259.$$

7. 计算下列各数的近似值: (1)  $\sqrt[3]{998.5}$ ; (2)  $e^{-0.03}$ .

【分析】  $|x|$  很小时,  $(1+x)^{\frac{1}{3}} \approx 1 + \frac{1}{3}x, e^x \approx 1+x$ .

$$\begin{aligned} \text{解 (1)} \quad \sqrt[3]{998.5} &= \sqrt[3]{1000-1.5} = \sqrt[3]{1000\left(1-\frac{1.5}{1000}\right)} = 10\sqrt[3]{1-0.0015} \\ &\approx 10\left(1 - \frac{1}{3} \times 0.0015\right) = 9.995. \end{aligned}$$

$$(2) \quad e^{-0.03} \approx 1 - 0.03 = 0.97.$$

### 提高题

$y=2^{\tan x}$ , 求  $dy$ .

$$\text{解} \quad dy = d2^{\tan x} = 2^{\tan x} \ln 2 d\tan x = 2^{\tan x} \ln 2 \cdot \sec^2 x dx.$$

### 复习题 2

#### 1. 判断题

$$(1) \quad (x^2+1)' = 2x+1. \quad (\quad)$$

$$(2) \quad \text{设函数 } f(x) \text{ 在 } x \text{ 处可导, 那么 } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x-\Delta x)}{\Delta x} = f'(x) \text{ 成立.} \quad (\quad)$$

$$(3) \quad \text{设函数 } y=e^x, \text{ 则 } y^{(n)} = ne^x. \quad (\quad)$$

$$(4) \quad f''(100) = [f'(100)]'. \quad (\quad)$$

$$(5) \quad \text{若 } u(x), v(x), w(x) \text{ 都是 } x \text{ 的可导函数, 则 } (uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'. \quad (\quad)$$

$$(6) \quad \text{若 } y=f(e^x)e^{f(x)}, f'(x) \text{ 存在, 那么有 } y'_x = f'(e^x)e^{f(x)} + e^{f(x)}f'(x)f(e^x). \quad (\quad)$$

答案 (1)  $\checkmark$ ; (2)  $\checkmark$ ; (3)  $\times$ ; (4)  $\times$ ; (5)  $\checkmark$ ; (6)  $\times$ .

#### 2. 填空题

$$(1) \quad \text{曲线 } f(x) = \sqrt{x} + 1 \text{ 在 } (1, 2) \text{ 点处的切线的斜率是 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(2) \quad \text{曲线 } f(x) = e^x \text{ 在 } (0, 1) \text{ 点的切线方程是 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(3) \quad \text{已知 } f(x) = x^3 + 3^x, \text{ 则 } f'(3) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(4) \quad \text{函数 } y = x^3 - 2, \text{ 当 } x = 2, \Delta x = 0.1 \text{ 时, } \frac{\Delta y}{\Delta x} \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(5) \quad \text{若函数 } f(x) \text{ 可导及 } n \text{ 为自然数, 则 } \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right] = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(6) \quad \text{曲线 } y = f(x) \text{ 在点 } M(x_0, f(x_0)) \text{ 的法线斜率为 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(7) \quad \text{设函数 } y = y(x) \text{ 是由方程 } x^2 + y^2 = 1 \text{ 确定, 则 } y' = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(8) \quad d \underline{\hspace{2cm}} = \sin 3x dx.$$

$$\text{答案 (1) } \frac{1}{2}; \quad (2) y = x + 1; \quad (3) f'(3) = 27(1 + \ln 3); \quad (4) \frac{\Delta y}{\Delta x} = 12.61;$$

$$(5) f'(x); \quad (6) -\frac{1}{f'(x_0)}; \quad (7) \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}; \quad (8) \frac{1}{3} \cos 3x.$$

#### 3. 单项选择题

(1) 下列函数中, 在  $x=0$  处可导的是( ).

- A.  $y = |x|$       B.  $y = 2\sqrt{x}$       C.  $y = x^3$       D.  $y = |\sin x|$
- (2) 下列函数在  $x = 0$  处不可导的是( ).
- A.  $y = 2\sqrt{x}$       B.  $y = \sin x$       C.  $y = \cos x$       D.  $y = x^3$
- (3) 设函数  $y = \begin{cases} x^2, & x \leq 1, \\ ax+b, & x > 1 \end{cases}$  在  $x = 1$  处连续且可导, 则( ).
- A.  $a = 1, b = 2$       B.  $a = 3, b = 2$       C.  $a = -2, b = 1$       D.  $a = 2, b = -1$
- (4) 设  $f(x)$  在  $x_0$  处可导, 则  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = ( )$ .
- A.  $-f'(x_0)$       B.  $f'(-x_0)$       C.  $f'(x_0)$       D.  $2f'(x_0)$
- (5) 设  $f(x)$  在  $x = x_0$  可导, 当  $f'(x_0) = ( )$  时, 有  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(x_0 - 2x) - f(x_0)} = \frac{1}{4}$ .
- A. 4      B. -4      C. 2      D. -2
- (6) 设  $f(x)$  在  $x_0$  处不连续, 则  $f(x)$  在  $x_0$  处( ).
- A. 必不可导      B. 一定可导      C. 可能可导      D. 无极限
- (7) 若  $f(x) = e^{-x} \cos x$ , 则  $f'(0) = ( )$ .
- A. 2      B. 1      C. -1      D. -2
- (8) 设  $y = f(x)$  是可微函数, 则  $df(\cos 2x) = ( )$ .
- A.  $2f'(\cos 2x)dx$       B.  $f'(\cos 2x)\sin 2x d2x$   
C.  $2f'(\cos 2x)\sin 2x dx$       D.  $-f'(\cos 2x)\sin 2x d2x$

答案 (1) C; (2) A; (3) D; (4) A; (5) D; (6) A; (7) C; (8) D.

4. 计算下列各题:

- (1) 设  $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$ , 求  $y'$ ;      (2) 设  $y = x\sqrt{x} + \ln \cos x$ , 求  $y'$ ;
- (3)  $y = \ln \sqrt{x} + \sqrt{\ln x}$ , 求  $\frac{dy}{dx}$ ;      (4)  $y = \ln(x - \sqrt{x^2 - a^2})$ , 求  $\frac{dy}{dx}$ ;
- (5) 设  $y = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{7}$ , 求  $\frac{dy}{dx}$ ;      (6)  $y = f(\ln x) e^{f(x)}$ ,  $f(x)$  可导, 求  $\frac{dy}{dx}$ ;
- (7)  $y = \arcsin(\sin x)$ , 求  $\frac{dy}{dx}$ ;      (8)  $y = \ln \tan \frac{x}{2} - \cos x \cdot \ln \tan x$ , 求  $\frac{dy}{dx}$ .

解 (1)  $y'(x) = (2x - 1)e^{\frac{1}{x}}$ ;

(2)  $y'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x} - \tan x$ ;

(3)  $y = \frac{1}{2} \ln x + \sqrt{\ln x}$ ,  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot \frac{1}{x}$ ;

(4)  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - a^2}} \cdot \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{x^2 - a^2}} \cdot 2x\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ ;

(5)  $y' = (x^{\frac{1}{3}} + 7^{\frac{1}{3}} + \sqrt[3]{7})' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - 7^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{x^2} \ln 7$ ;

(6)  $\frac{dy}{dx} = f'(\ln x) \cdot \frac{1}{x} \cdot e^{f(x)} + f(\ln x) \cdot e^{f(x)} \cdot f'(x)$ ;

(7)  $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{\cos x}{|\cos x|}$ ;

(8)  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\tan \frac{x}{2}} \cdot \sec^2 \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} + \sin x \cdot \ln \tan x - \cos x \cdot \frac{1}{\tan x} \sec^2 x$

$= \frac{1}{\sin x} + \sin x \cdot \ln \tan x - \frac{1}{\sin x} \sin x \cdot \ln \tan x.$



5. 求等边双曲线  $y = \frac{1}{x}$  在点  $(\frac{1}{2}, 2)$  处的切线的斜率, 并写出在该点处的切线方程和法线方程.

解 由导数的几何意义, 得切线斜率为  $k = y' \Big|_{x=\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{x}\right)' \Big|_{x=\frac{1}{2}} = -\frac{1}{x^2} \Big|_{x=\frac{1}{2}} = -4$ .

所求切线方程为  $y - 2 = -4 \left(x - \frac{1}{2}\right)$ , 即  $4x + y - 4 = 0$ .

法线方程为  $y - 2 = \frac{1}{4} \left(x - \frac{1}{2}\right)$ , 即  $2x - 8y + 15 = 0$ .

6. 求曲线  $y = \sqrt{x}$  在点  $(4, 2)$  处的切线方程.

解 因为  $y' = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ,  $k = y' \Big|_{x=4} = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$ , 故所求切线方程为

$$y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4), \quad \text{即 } -x + 4y - 4 = 0.$$

7. 已知  $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0, \\ x, & x \geq 0, \end{cases}$  求  $f'(x)$ .

解 当  $x \neq 0$  时, 用公式有  $f'(x) = \begin{cases} \cos x, & x < 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases}$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x - 0}{x - 0} = 1, \quad f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 0}{x - 0} = 1,$$

$$f'_-(0) = f'_+(0) = 1, \text{ 故 } f'(0) = 1, \text{ 所以 } f'(x) = \begin{cases} \cos x, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

8. 已知  $y = x + x^x$ , 求  $y'$ .

解  $y' = (x + e^{x \ln x})' = 1 + e^{x \ln x} (x \ln x)' = 1 + x^x (\ln x + 1)$ .

9. 求由方程  $xy + \ln y = 1$  所确定的函数  $y = f(x)$  在点  $M(1, 1)$  处的切线方程.

解 在题设方程两边同时对自变量  $x$  求导, 得  $y + x y' + \frac{1}{y} y' = 0$ , 解得  $y' = -\frac{y^2}{x y + 1}$ . 在点  $M(1, 1)$

处,  $y' \Big|_{\substack{x=1 \\ y=1}} = -\frac{1^2}{1 \times 1 + 1} = -\frac{1}{2}$ . 于是, 在点  $M(1, 1)$  处的切线方程为  $y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1)$ , 即  $x + 2y - 3 = 0$ .

10. 设  $y = y(x)$  是由方程  $x^2 + y^2 - xy = 4$  确定的隐函数, 求  $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}$ .

解 方程两边关于  $x$  求导得  $2x + 2yy' - y - xy' = 0$ , 即  $(2y - x)y' = y - 2x$ , 故  $y' = \frac{y - 2x}{2y - x}$ .

对方程  $2x + 2yy' - y - xy' = 0$  两边关于  $x$  求导, 得

$$2 + 2y'^2 + 2yy'' - y' - y' - xy'' = 0, \text{ 即 } y'' = \frac{2(y' - y'^2 - 1)}{2y - x} = \frac{-6(x^2 + y^2 - xy)}{(2y - x)^3}.$$

11. 设  $\cos(x + y) + e^y = 1$ , 求  $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}$ .

解 在题设方程两边同时对自变量  $x$  求导, 得  $\sin(x + y) \cdot \left(1 + \frac{dy}{dx}\right) + e^y \frac{dy}{dx} = 0$ . 整理得

$$\left[\sin(x + y) + e^y\right] \frac{dy}{dx} = -\sin(x + y), \text{ 解得 } \frac{dy}{dx} = \frac{-\sin(x + y)}{e^y + \sin(x + y)}.$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{e^y y' (e^y - \sin(x + y)) - e^y (e^y y' - \cos(x + y)(1 + y'))}{[e^y + \sin(x + y)]^2}$$

$$= \frac{2e^{2y} \cos(x + y) - e^{2y} \sin(x + y) - \frac{1}{2} e^y \sin 2(x + y)}{[e^y + \sin(x + y)]^3}.$$

12. 设  $y = x + \ln y$ ; 求  $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ .

解 方程两边同时对自变量  $x$  求导, 得

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{1}{y} \frac{dy}{dx}, \text{ 故 } \frac{dy}{dx} = \frac{y}{y-1}. \text{ 于是 } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dy}{dx}(y-1) - y \frac{dy}{dx}}{(y-1)^2} = -\frac{\frac{dy}{dx}}{(y-1)^2} = -\frac{y}{(y-1)^3}.$$

13.  $y = 1 + xe^y$ , 求  $\frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{x=0}$ .

解 将  $x=0$  代入方程中得  $y=1$ .

方程两边同时对自变量  $x$  求导, 得  $y' = e^y + xe^y y'$ .

将  $x=0, y=1$  代入上式得  $y' = e$ .

在  $y' = e^y + xe^y y'$  两边同时对自变量  $x$  求导, 得  $y'' = e^y y' + e^y y' + xe^y (y')^2 + xe^y y''$ .

将  $x=0, y=1, y'=e$  代入上式得  $y'' = 2e^2$ , 即  $y'' \Big|_{x=0} = y'' \Big|_{\substack{y=1 \\ y'=e}} = 2e^2$ .

14.  $xy - \sin(\pi y^2) = 0$ , 求  $\frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{\substack{x=0 \\ y=-1}}$ .

解 方程两边同时对自变量  $x$  求导, 得  $y + xy' - \cos(\pi y^2) \cdot 2\pi y y' = 0$ .

将  $x=0, y=-1$  代入上式得  $-1 - 0 - \cos\pi \cdot 2\pi \cdot (-1) \cdot y' = 0$ , 即  $y' = -\frac{1}{2\pi}$ .

在  $y + xy' - \cos(\pi y^2) \cdot 2\pi y y' = 0$  两边同时对自变量  $x$  求导, 得

$$y' + y' + xy'' + \sin(\pi y^2) \cdot (2\pi y y')^2 - \cos(\pi y^2) \cdot 2\pi (y')^2 - \cos(\pi y^2) \cdot 2\pi y y'' = 0.$$

将  $x=0, y=-1, y' = -\frac{1}{2\pi}$  代入上式得

$$\left(-\frac{1}{2\pi}\right) + \left(-\frac{1}{2\pi}\right) + 0 + 0 - \cos(\pi) \cdot 2\pi \left(-\frac{1}{2\pi}\right)^2 - \cos(\pi) \cdot 2\pi(-1)y'' = 0, \text{ 故 } y''(0) = -\frac{1}{4\pi^2}.$$

15. 求由方程  $xy - e^x + e^y = 0$  所确定的隐函数  $y$  的导数  $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{x=0}$ .

解 方程两边对  $x$  求导得  $y + x \frac{dy}{dx} - e^x + e^y \frac{dy}{dx} = 0$ , 解得  $\frac{dy}{dx} = \frac{e^x - y}{x + e^y}$ .

由原方程知  $x=0, y=0$ , 所以  $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=0} = \frac{e^x - y}{x + e^y} \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 1$ .

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(e^x - y')(x + e^y) - (e^x - y)(1 + e^y y')}{(x + e^y)^2}, \text{ 故 } \frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{x=0} = \frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0 \\ y'=1}} = -2.$$

16. 若  $y^3 - x^2 y = 2$ , 求  $\frac{d^2y}{dx^2}$ .

解 两边对  $x$  求导得  $3y^2 y' - 2xy - x^2 y' = 0$ , 解得  $y' = \frac{2xy}{3y^2 - x^2}$ , 再求导得

$$6yy'^2 + 3y^2 y'' - 2y - 2xy' - 2xy' - x^2 y'' = 0,$$

解得  $y'' = \frac{4xy' - 6yy'^2 + 2y}{3y^2 - x^2} \left( \text{其中 } y' = \frac{2xy}{3y^2 - x^2} \right)$ .

17. 已知  $\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 3t - t^3, \end{cases}$  求  $\frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{t=0}$ .

解  $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3 - 3t^2}{2 - 2t} = \frac{3}{2} (1+t),$



$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt} \left( \frac{dy}{dx} \right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{3}{2}}{2-2t} = \frac{3}{4(1-t)}, \quad \text{故} \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=0} = -\frac{3}{4}.$$

18. 设函数  $y = x^3 e^{-x}$ , 求  $y^{(20)}(0)$ .

$$\begin{aligned} \text{解} \quad y^{(20)}(x) &= C_{20}^0 \cdot (e^{-x})^{(20)} x^3 + C_{20}^1 (e^{-x})^{(19)} (x^3)' + C_{20}^2 (e^{-x})^{(18)} (x^3)'' + C_{20}^3 (e^{-x})^{(17)} (x^3)''', \\ y^{(20)}(0) &= \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3 \cdot 2 \cdot 1} (-1)^{17} e^0 \cdot 6 = -6840. \end{aligned}$$

19. 已知  $f(x) = \frac{x^2}{1-x^2}$ , 求  $f^{(n)}(0)$ .

$$\begin{aligned} \text{解} \quad f(x) &= -1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}, \\ f^{(2k+1)}(0) &= 0, \quad f^{(2k)}(0) = (2k)! \quad k=0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

20. 求微分  $dy$ :

$$(1) y = \arcsin \sqrt{x};$$

$$(2) xy = e^{x+y};$$

$$(3) y = f(e^x);$$

$$(4) y = a^x + \sqrt{1-a^{2x}} \arccos(a^x).$$

$$\text{解} \quad (1) dy = d\arcsin \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{1-x}} d\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx;$$

$$(2) dxy = de^{x+y}, \text{ 即 } ydx + xdy = e^{x+y}(dx + dy), \text{ 故 } dy = \frac{e^{x+y} - y}{x - e^{x+y}} dx.$$

$$(3) dy = df(e^x) = f'(e^x) de^x = f'(e^x) e^x dx.$$

$$\begin{aligned} (4) dy &= da^x + d\sqrt{1-a^{2x}} \arccos(a^x) = a^x \ln a dx + \arccos a^x \cdot d\sqrt{1-a^{2x}} + \sqrt{1-a^{2x}} d\arccos a^x \\ &= a^x \ln a dx + \arccos a^x \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-a^{2x}}} d(1-a^{2x}) + \sqrt{1-a^{2x}} \left( -\frac{1}{\sqrt{1-a^{2x}}} \right) da^x \\ &= a^x \ln a dx + \arccos a^x \cdot \frac{-2a^{2x} \ln a}{2\sqrt{1-a^{2x}}} dx + \sqrt{1-a^{2x}} \left( -\frac{1}{\sqrt{1-a^{2x}}} \right) a^x \ln a dx \\ &\quad \cdot \left( a^x \ln a - \arccos a^x \cdot \frac{a^{2x} \ln a}{\sqrt{1-a^{2x}}} - a^x \ln a \right) dx \\ &= \left( -\arccos a^x \cdot \frac{a^{2x} \ln a}{\sqrt{1-a^{2x}}} \right) dx. \end{aligned}$$

21. 设  $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x}, & \text{当 } x > -1, x \neq 0, \\ A, & \text{当 } x = 0 \end{cases}$  在  $(-1, +\infty)$  上连续, 求  $A$  值, 并判定  $f'(x)$  在  $x=0$  处的连续性.

解 因为  $f(x)$  在  $x=0$  处连续, 所以  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ , 即  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = A$ , 则  $A=1$ .

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1+x)}{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \quad \left( \frac{0}{0} \text{ 型未定式} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{2x(1+x)} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

当  $x \neq 0$  时,  $f'(x) = \frac{\frac{1}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2}$ , 而  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1+x)\ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{1+x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \ln(1+x)}{2x} = -\frac{1}{2}$ , 所以  $f'(x)$  连续.

22. 设函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{x \ln x}{1-x}, & x > 0, x \neq 1, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x = 1, \end{cases}$  试证明  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上连续, 并求  $f'(1)$ .

解  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(1-x)}{1-x} = 1 = f(1)$ , 所以  $f(x)$  在  $x=1$  处连续;  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x}{1-x} = 0 = f(0)$ , 所以  $f(x)$  在  $x=0$  处连续. 从而  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  连续.

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x \ln x}{1-x} + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x + 1 - x}{-(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x + 1 - 1}{-2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}.$$

23. 利用函数的微分代替函数的增量求  $\sqrt[3]{1.02}$  的近似值.

解 设函数  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ,  $x_0 = 1$ ,  $\Delta x = 0.02$ , 则

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \Delta x = 1 + \frac{1}{3} \cdot 0.02 = 1 + \frac{2}{300}.$$

### 自测题 2 答案

1. (1) 充分必要; (2) 充分, 必要;

$$(3) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-h) - f(3)}{2h} = -\frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-h) - f(3)}{-h} = -\frac{1}{2} f'(3) = -\frac{1}{2} \cdot 2 = -1;$$

(4) 令  $y' = 2ax + b = 0$ , 得驻点  $x = -\frac{b}{2a}$ , 也为极值点. 若要曲线与  $x$  轴相切, 则只能是在横坐标为极

值点处相切, 即  $x = -\frac{b}{2a}$ ,  $y = 0$ .

由  $0 = a \left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right) + c$ , 得  $b^2 = 4ac$ .

(5) 令  $f(x) = \cos x$ , 由  $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \Delta x$ , 得  $\cos(x_0 + \Delta x) \approx \cos x_0 - \sin x_0 \cdot \Delta x$ , 故

$$\cos 149^\circ = \cos \left( \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{180} \right) \approx \cos \frac{5\pi}{6} - \sin \frac{5\pi}{6} \cdot \left( -\frac{\pi}{180} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{360}.$$

$$2. (1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(x_0 - 2x) - f(x_0 - x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{f(x_0 - 2x) - f(x_0)}{-2x} \cdot (-2) + \frac{f(x_0 - x) - f(x_0)}{-x}} = \frac{1}{-2f'(x_0) + f'(x_0)} = -\frac{1}{f'(x_0)} = 1.$$

故选 C.

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1-x)}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1-x) - f(1)}{-x} = \frac{1}{2} f'(1) = -1, \text{ 则 } f'(1) = -2, \text{ 切线斜率 } f'(1) = -2,$$

故选 B.

(3)  $df(e^x) = f'(e^x) de^x = f'(e^x) e^x dx$ , 故选 C.

$$(4) f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(a+bx) - \varphi(a-bx)}{x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\varphi(a+bx) - \varphi(a)}{x} - \frac{\varphi(a-bx) - \varphi(a)}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\varphi(a+bx) - \varphi(a)}{bx} \cdot b + \frac{\varphi(a-bx) - \varphi(a)}{-bx} \cdot b \right] \\ = 2b\varphi'(a),$$

故选 C.

$$(5) y = \cos \frac{\arcsin x}{2}, \quad y' = -\sin \frac{\arcsin x}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$



$$y'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sin \frac{\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = \sin \frac{\pi}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{1}{2},$$

故选 A.

3. 解 (1)  $y' = \pi x^{\pi-1} + \pi^x \ln \pi + e^{x \ln \pi} (1 + \ln x)$ ;

(2)  $y' = (a^x \ln a + a x^{a-1}) \sin x + (a^x + x^a) \cos x$ .

4. 解 因为是分段函数, 所以分段点处的左右导数要分别用定义来求

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{x - 0} = -1, \quad f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + ax + b - 1}{x - 0} = a.$$

当且仅当  $a = -1$  时,  $f(x)$  在  $x = 0$  处可导, 由可导必连续得  $b = 1$ ; 故当  $a = -1, b = 1$  时  $f(x)$  可导, 且

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x}, & x < 0, \\ -1, & x = 0, \\ 2x - 1, & x > 0. \end{cases}$$

$$5. \text{ 解 } y' = \frac{dy}{dx} = 2xf\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 f'\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2xf\left(\frac{1}{x}\right) - f'\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$\begin{aligned} y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} &= 2f\left(\frac{1}{x}\right) + 2x \cdot f'\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) - f''\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= 2f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{2}{x} f'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2} f''\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

$$6. \text{ 解 } y = 1 + xe^y. \quad (1)$$

将  $x = 0$  代入(1)式得  $y = 1$ . 在  $y = 1 + xe^y$  两边关于  $x$  求导得

$$y' = e^y + xe^y y'. \quad (2)$$

将  $x = 0, y = 1$  代入(2)式, 得  $y'(0) = e$ .

(2)式两端关于  $x$  求导得

$$y'' = e^y y' + e^y y' + xe^y (y')^2 + xe^y y''. \quad (3)$$

将  $x = 0, y = 1, y' = e$  代入(3)式得  $y'' = 2e^2$ .

$$7. \text{ 解 } y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2 + 2t}{1 - \frac{1}{1+t}} = (3t+2)(1+t) = 3t^2 + 5t + 2,$$

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{\frac{d}{dt} \left( \frac{dy}{dx} \right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{6t+5}{1 - \frac{1}{1+t}} = \frac{(6t+5)(1+t)}{t}.$$

$$8. \text{ 解 } y' = \frac{dy}{dx} = f'\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right) \cdot \frac{3(3x+2) - 3(3x-2)}{(3x+2)^2} = \arctan\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)' \cdot \frac{12}{(3x+2)^2},$$

$$\text{故 } \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = \arctan 1 \cdot \frac{12}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

## 微分中值定理与导数的应用

### 3.1 大纲要求及重点内容

#### 1. 大纲要求

- (1) 理解罗尔定理、拉格朗日定理和柯西定理,会运用中值定理证明一些等式和不等式.
- (2) 掌握函数单调性的判别方法,会求函数的单调区间,会利用单调性证明一些不等式.
- (3) 熟练掌握求函数极值的方法,会求函数在闭区间上的最大值和最小值,会解简单的最大值、最小值的应用题.
- (4) 会求曲线的凹凸区间和拐点,会求曲线的渐近线,能正确地做出某些函数的图形草图.
- (5) 了解泰勒公式、泰勒定理、麦克劳林公式及其拉格朗日型余项,能写出某些初等函数的麦克劳林展开式.
- (6) 熟练掌握洛必达法则,会求各类“未定式”的极限.

#### 2. 重点内容

- (1) 用中值定理讨论方程在给定区间内的根的情况、证明等式;
- (2) 用中值定理和单调性证明不等式;
- (3) 用洛必达法则求未定式的极限;
- (4) 函数的极值、单调性、凹凸性、拐点及渐近线的求法;
- (5) 函数的最大值和最小值以及求实际问题的最大值或最小值.

### 3.2 内容精要

#### 1. 中值定理与泰勒公式

**定理 1(费尔马定理)** 若函数  $f(x)$  满足条件:

- (1)  $f(x)$  在点  $x_0$  的某邻域有定义,并且在某邻域内恒有  $f(x) \leq f(x_0)$  或  $f(x) \geq f(x_0)$ ;



(2)  $f(x)$  在  $x_0$  处可导.

则有  $f'(x_0) = 0$ .

**定理 2(罗尔定理)** 设函数  $f(x)$  满足条件:

- (1) 在  $[a, b]$  上连续;
- (2) 在  $(a, b)$  内可导;
- (3)  $f(a) = f(b)$ .

则在  $(a, b)$  内至少存在一点  $\xi$  使  $f'(\xi) = 0$ .

**定理 3(拉格朗日中值定理)** 设函数  $f(x)$  满足条件:

- (1) 在  $[a, b]$  上连续;
- (2) 在  $(a, b)$  内可导.

则在  $(a, b)$  内至少存在一点  $\xi$  使  $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$ .

**注意** (1) 在需要建立  $f(x)$  与其导数  $f'(x)$  联系时, 应考虑使用拉格朗日中值定理.

(2) 在证明不等式时, 应判断是否使用拉格朗日中值定理.

**定理 4(柯西定理)** 设函数  $f(x), g(x)$  满足条件:

- (1) 在  $[a, b]$  上连续;
- (2) 在  $(a, b)$  内均可导; 且  $g'(x) \neq 0$ .

则在  $(a, b)$  内至少存在一点  $\xi$  使  $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ .

**定理 5(泰勒公式)** 设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处的某邻域内具有  $n+1$  阶导数, 则对该邻域内异于  $x_0$  的任意点  $x$ , 在  $x_0$  与  $x$  之间至少存在一个  $\xi$ , 使得

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

其中  $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$  称为拉格朗日型余项,  $R_n(x) = o((x - x_0)^n)$  称为佩亚诺型余项.

**(麦克劳林公式)** 当  $x_0 = 0$  时, 有

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (\xi \text{ 在 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间}),$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n).$$

常用的五种函数的麦克劳林公式, 如  $e^x, \sin x, \cos x, \ln(1+x), (1+x)^m$  的展开式如下:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad \theta \in (0, 1),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1}),$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n),$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).$$

## 2. 一元函数微分的应用

### (1) 函数的单调性

① 定义  $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ , 且当  $x_1 < x_2$  时,  $f(x_1) < f(x_2)$  (或  $f(x_1) > f(x_2)$ ), 则函数  $f(x)$  在  $(a, b)$  内单调增加 (或单调减少).

② 判别方法  $\forall x \in (a, b)$ , 都有  $f'(x) > 0$  (或  $f'(x) < 0$ ), 则函数  $f(x)$  在  $(a, b)$  内单调增加 (或单调减少).

③ 用函数的单调性可以证明不等式.

### (2) 极值与最值

① 极值的定义 函数  $f(x)$  在  $x_0$  的某一邻域内异于  $x_0$  的任意一点, 若恒有  $f(x) > f(x_0)$  ( $f(x) < f(x_0)$ ), 则称  $f(x_0)$  为  $y=f(x)$  的极小值 (或极大值).

② 驻点 若  $f'(x_0) = 0$ , 则  $x_0$  为函数  $f(x)$  的驻点.

③ 定理 1 (极值存在的必要条件) 设函数  $f(x)$  在  $x_0$  处可导, 且在  $x_0$  处取得极值, 则  $f'(x_0) = 0$ .

④ 定理 2 (极值存在的第一充分条件) 设函数  $f(x)$  在  $x_0$  的某一邻域内可导, 且  $f'(x_0) = 0$  (或  $f(x)$  在  $x_0$  处连续, 但  $f'(x_0)$  不存在), 若设函数  $f(x)$  在  $x_0$  的某一邻域内, 若:

I  $f'(x)$  在  $x_0$  的附近左正右负, 则  $f(x_0)$  为极大值;

II  $f'(x)$  在  $x_0$  的附近左负右正, 则  $f(x_0)$  为极小值;

III  $f'(x)$  在  $x_0$  的附近不变号, 则  $f(x_0)$  不是极值.

⑤ 定理 3 (极值存在的第二充分条件) 设函数  $f(x)$  在  $x_0$  处有  $f''(x_0) \neq 0$  且  $f'(x_0) = 0$ , 则:

I 当  $f''(x_0) < 0$  时,  $f(x_0)$  为极大值;

II 当  $f''(x_0) > 0$  时,  $f(x_0)$  为极小值;

III 当  $f''(x_0) = 0$  时, 无法判断.

推论 设函数  $f(x)$  在  $x_0$  处具有二阶以上的  $n$  阶导数, 且  $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ ,  $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ , 则:

I  $n$  为偶数且  $f^{(n)}(x_0) < 0$ , 则  $f(x)$  在  $x_0$  处取得极大值;

II  $n$  为偶数且  $f^{(n)}(x_0) > 0$ , 则  $f(x)$  在  $x_0$  处取得极小值;

III  $n$  为偶数且  $f^{(n)}(x_0) = 0$ , 无法判断;

IV  $n$  为奇数时,  $f(x)$  在  $x_0$  处无极值.

### ⑥ 最值

若  $f(x)$  为定义在  $[a, b]$  上的连续函数, 则在  $[a, b]$  函数值最大的为最大值, 最小的为最小值. 这时, 求最值的求法步骤为:

I 求  $f'(x)$ , 求出驻点和使  $f'(x)$  不存在的点;

II 计算出 (I) 中所得到的各点的函数值及  $f(a), f(b)$ ;

III 比较以上各函数值的大小, 最大者为最大值, 最小者为最小值.

若  $f(x)$  为定义在  $[a, b]$  上有唯一的极值点, 则这个极值点为最值点.



应用问题的最值:

I 建立目标函数(根据实际问题);

II 求目标函数的最值.

(3) 函数的凹凸和拐点

① 函数的凹凸定义: 设  $\forall x_1, x_2 \in I$ , 恒有  $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$   $\left(f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right)$ , 则称  $f(x)$  在  $I$  上是上凸的(下凸).

② 凹凸性的判断: 设  $\forall x \in I$ , 若  $f''(x) < 0$  (或  $f''(x) > 0$ ), 则  $f(x)$  在  $I$  上是上凸的(下凸).

③ 拐点: 函数  $f(x)$  的图形上上凸弧和下凸弧的分界点称为图形的拐点.

④ 拐点的求法: 若在  $x_0$  处  $f''(x_0) = 0$  (或  $f''(x_0)$  不存在), 当  $x$  变动经过  $x_0$  时,  $f''(x)$  变号, 则  $(x_0, f(x_0))$  为拐点; 否则不是拐点.

(4) 渐近线

① 水平渐近线: 若  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$  或  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ , 则称  $y = b$  为曲线  $y = f(x)$  的水平渐近线.

② 铅直渐近线: 若  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$  或  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$ , 则称  $x = x_0$  为曲线  $y = f(x)$  的铅直渐近线.

③ 斜渐近线: 若  $a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ ,  $b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax]$ , 则称  $y = ax + b$  为曲线  $y = f(x)$  的斜渐近线.

(5) 边际与弹性

① 边际

设函数  $y = f(x)$  可导, 称导数  $f'(x)$  为  $f(x)$  的边际函数,  $f'(x)$  在  $x_0$  处的函数值  $f'(x_0)$  为  $f(x)$  在  $x_0$  处的边际函数值, 即当  $x = x_0$  时, 若  $x$  改变一个单位, 则  $y$  改变  $f'(x_0)$  个单位.

在经济学中, 边际成本定义为产量增加一个单位时所增加的总成本, 边际收益定义为多销售一个单位产品时增加的销售总收入, 等等.

$C(x)$  表示产量为  $x$  单位时的总成本,  $R(x)$  表示销售  $x$  单位产品时的总收益,  $C'(x)$  和  $R'(x)$  表示边际成本和边际收益, 则

总利润函数  $L(x) = R(x) - C(x)$ , 边际利润  $L'(x) = R'(x) - C'(x)$ .

② 弹性

弹性用于定量描述一个经济变量对另一个经济变量变化的反应程度, 即当一个经济变量变动百分之一时另一个经济变量变动百分之几. 设  $x$  和  $y$  是两个变量,  $y$  对  $x$  的弹性记为  $\frac{Ey}{Ex}$ , 当  $y = y(x)$  可导时, 其计算公式为  $\frac{Ey}{Ex} = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx}$ .

设某商品的需求量为  $Q$ , 价格为  $P$ , 需求函数  $Q = Q(P)$  可导, 则该商品需求对价格的弹性(需求弹性)为  $\frac{EQ}{EP} = \frac{P}{Q} \cdot \frac{dQ}{dP}$ . 由于需求函数  $Q = Q(P)$  一般是单调减少的, 因而需求对价格的弹性常为负值.

收益对价格的弹性为  $\frac{ER}{EP} = \frac{P}{Q} \cdot \frac{dR}{dP}$ . 因为  $R = PQ$ , 于是有

$$\frac{ER}{EP} = \frac{1}{Q} \cdot \frac{dPQ}{dP} = \frac{1}{Q} \left( Q + P \frac{dQ}{dP} \right) = 1 + \frac{EQ}{EP}.$$

### 3.3 题型总结与典型例题

#### 1. 中值定理

**题型 3-1** 欲证结论: 在  $(a, b)$  内至少存在一点  $\xi$  使  $f^{(n)}(\xi) = 0$  的命题的证明

**【解题思路】** 此类型的命题证法有三种思路:

- (1) 验证  $f^{(n-1)}(x)$  在  $[a, b]$  上满足罗尔定理条件, 由该定理证得.
- (2) 验证  $\xi$  为  $f^{(n-1)}(x)$  的最值或极值点, 用费尔马定理证明.
- (3) 条件涉及某一点的高阶导数都存在时, 也可用泰勒公式; 在使用泰勒公式之后可能需要用介值定理.

**例 3.1** 设  $f(x)$  在  $[1, 2]$  上具有二阶导数  $f''(x)$ , 且  $f(2) = f(1) = 0$ . 如果  $F(x) = (x-1)f(x)$ , 证明: 至少存在一点  $\xi \in (1, 2)$ , 使  $F''(\xi) = 0$ .

**证明** 由已知  $F(x)$  在  $[1, 2]$  上连续, 在  $(1, 2)$  内可导,  $F(1) = F(2) = 0$ , 所以  $F(x)$  满足罗尔定理条件, 则至少存在一点  $a \in (1, 2)$ , 使得  $F'(a) = 0$ . 因为  $F'(x) = f(x) + (x-1)f'(x)$ , 则由题设知  $F'(x)$  在  $[1, a]$  上连续, 在  $(1, a)$  内可导, 且  $F'(1) = f(1) = 0 = F'(a)$ , 故  $F'(x)$  在  $[1, a]$  上满足罗尔定理条件, 则至少存在一点  $\xi \in (1, a) \subset (1, 2)$ , 使  $F''(\xi) = 0$ .

**例 3.2** 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内二阶可导. 连接点  $A(a, f(a))$  与点  $B(b, f(b))$  的直线段交曲线  $f(x)$  于  $C(c, f(c))$  处, 此处  $a < c < b$ . 证明: 在  $(a, b)$  内至少存在一点  $\xi$ , 使  $f''(\xi) = 0$ .

**证明**  $f(x)$  在  $[a, c], [c, b]$  上满足拉格朗日中值定理, 因此, 至少分别存在一点  $\xi_1 \in (a, c)$ ,  $\xi_2 \in (c, b)$  使得  $f'(\xi_1) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}$ ,  $f'(\xi_2) = \frac{f(b) - f(c)}{b - c}$ , 由  $a, b, c$  三点位于同一直线上, 因此  $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$ , 不妨设  $\xi_1 < \xi_2$ , 在  $[\xi_1, \xi_2]$  上,  $f'(x)$  满足罗尔定理条件, 故至少存在一点  $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (a, b)$ , 使得  $f''(\xi) = 0$ .

**例 3.3** 设函数  $f(x)$  在  $[0, 3]$  上连续, 在  $(0, 3)$  内可导. 又  $f(0) + f(1) + f(2) = 3$ ,  $f(3) = 1$ , 证明存在一点  $\xi \in (0, 3)$ , 使得  $f'(\xi) = 0$ .

**证明** 有题设可知, 函数  $f(x)$  在  $[0, 2]$  上连续, 所以  $m \leq f(x) \leq M$ , 其中  $m, M$  分别为  $f(x)$  在  $[0, 2]$  的最小值和最大值, 于是

$$m \leq f(1) \leq M, \quad m \leq f(2) \leq M, \quad m \leq f(0) \leq M,$$

$$3m \leq f(0) + f(1) + f(2) \leq 3M, \quad \text{即 } m \leq \frac{f(0) + f(1) + f(2)}{3} \leq M.$$

由介值定理, 存在点  $\eta \in [0, 2]$ , 使得  $f(\eta) = \frac{f(0) + f(1) + f(2)}{3} = 1$ . 又  $f(3) = 1$ , 可知  $f(x)$  在  $[\eta, 3]$  上满足罗尔定理, 故存在一点  $\xi \in (\eta, 3) \subset (0, 3)$ , 使得  $f'(\xi) = 0$ .

**例 3.4** 设函数  $f(x)$  在区间  $(a, b)$  上连续可导,  $x_i \in (a, b)$ ,  $\lambda_i > 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ , 且



$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ , 证明: 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $\sum_{i=1}^n \lambda_i f'(x_i) = f'(\xi)$ .

**证明** 不妨设  $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n$ . 若  $x_1 = x_n$ , 则取  $\xi = x_1$ ,  $\sum_{i=1}^n \lambda_i f'(x_i) = f'(\xi)$  显然成立.

若  $x_1 < x_n$ , 再设

$f'(x_1) = \min\{f'(x_1), f'(x_2), \cdots, f'(x_n)\}$ ,  $f'(x_n) = \max\{f'(x_1), f'(x_2), \cdots, f'(x_n)\}$ , 则有

$$\begin{aligned} f'(x_1) &= f'(x_1) \sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i f'(x_1) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f'(x_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f'(x_n) = f'(x_n) \sum_{i=1}^n \lambda_i = f'(x_n), \end{aligned}$$

即  $f'(x_1) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f'(x_i) \leq f'(x_n)$ . 又因为  $f'(x)$  在区间  $(a, b)$  上连续, 因而也在  $(x_1, x_n)$  上连续, 由连续函数的介值定理, 存在  $\xi \in (x_1, x_n) \subset (a, b)$ , 使得  $f'(\xi) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f'(x_i)$ . 本题去掉导函数的连续性结论也成立.

**例 3.5** 已知函数  $f(x)$  具有二阶导数, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ ,  $f(1) = 0$ . 证明: 存在一点  $\xi \in (0, 1)$  使  $f''(\xi) = 0$ .

**证明** 由  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ , 得  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 0$ .

函数  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 在  $(0, 1)$  内可导, 且  $f(0) = f(1) = 0$ , 由罗尔定理, 至少存在  $x_0 \in (0, 1)$  使  $f'(x_0) = 0$ .

函数  $f'(x)$  在  $[0, x_0]$  上连续, 在  $(0, x_0)$  内可导, 且  $f'(0) = f'(x_0) = 0$ , 由罗尔定理, 至少存在  $\xi \in (0, x_0) \subset (0, 1)$  使  $f''(\xi) = 0$ .

**例 3.6** 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内二阶可导, 且  $f(a) = f(b)$ ,  $f'_+(a) f'_-(b) > 0$ , 试证: 在  $(a, b)$  内至少存在一点  $\xi$ , 使  $f''(\xi) = 0$ .

**证明** 因为  $f'_+(a) f'_-(b) > 0$ , 所以, 可设  $f'_+(a) > 0$ ,  $f'_-(b) > 0$ . 由于  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_+(a) > 0$ , 所以, 总存在  $c \left( a < c < \frac{a+b}{2} \right)$ , 使  $\frac{f(c) - f(a)}{c - a} > 0$ . 又  $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} = f'_-(b) > 0$ , 所以, 总存在  $d \left( \frac{a+b}{2} < d < b \right)$ , 使  $\frac{f(d) - f(b)}{d - b} > 0$ , 即  $f(c) > f(a) = f(b) > f(d)$ , 且  $[c, d] \subset [a, b]$ .

由  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续知,  $f(x)$  在  $[c, d]$  上也连续, 由介值定理知总存在  $x_0 \in [c, d] \subset [a, b]$  使  $f(x_0) = f(a) = f(b)$ . 将  $f(x)$  分别在  $[a, x_0]$ ,  $[x_0, b]$  上用罗尔定理得: 总存在  $x_1 \in (a, x_0)$ ,  $x_2 \in (x_0, b)$ , 使  $f'(x_1) = 0$ ,  $f'(x_2) = 0$ , 在  $[x_1, x_2]$  上再用罗尔定理得: 总存在  $\xi \in (x_1, x_2) \subset (a, b)$ , 使  $f''(\xi) = 0$ .

**题型 3-2** 欲证结论: 在  $(a, b)$  内至少存在一点  $\xi$  使  $f^{(n)}(\xi) = k$  的命题的证明

**【解题思路】** (1) 作辅助函数  $F(x)$ ;

(2) 验证  $F(x)$  在  $[a, b]$  上满足罗尔定理条件, 由该定理结论证得.

构造辅助函数  $F(x)$  的方法: (1) 原函数法; (2) 常数  $k$  值法.

### 1) 原函数方法

具体步骤: (1) 将欲证结论中的  $\xi$  改写成  $x$ ;

(2) 将式子写成容易去掉一次导数符号的形式(即容易积分的形式);

(3) 去掉一次导数符号(即积分一次), 移项, 使等式一端为“0”, 另一端即为新作的辅助函数  $F(x)$  (为简便, 积分常数取为 0).

例如, 证明存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $cf'(\xi) = dg'(\xi)$ , 其中  $c, d$  为常数.

因为  $cf'(\xi) = dg'(\xi) \Leftrightarrow [cf(x)]' \Big|_{x=\xi} = [dg(x)]' \Big|_{x=\xi} \Leftrightarrow [cf(x) - dg(x)]' \Big|_{x=\xi} = 0$ ,

所以可构造辅助函数  $F(x) = cf(x) - dg(x)$ .

有的时候需要把待证等式进行变形, 求辅助函数  $F(x)$ .

**例 3.7** 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导,  $f(a) = 0$  ( $a > 0$ ). 证明: 在  $(a, b)$  内至少存在一点  $\xi$  使  $f(\xi) = \frac{b-\xi}{a} f'(\xi)$ .

**【分析】** 将欲证结论中的  $\xi$  改写成  $x$ , 则

$$\begin{aligned} f(\xi) = \frac{b-\xi}{a} f'(\xi) &\Rightarrow f(x) = \frac{b-x}{a} f'(x) \Rightarrow \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{b-x}{a} \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{a}{b-x} \Rightarrow [\ln f(x)]' \\ &= [-a \ln(b-x)]' \Rightarrow \ln f(x) = -a \ln(b-x) + C \Rightarrow (b-x)^a f(x) = C. \end{aligned}$$

**证明** 做辅助函数  $F(x) = (b-x)^a f(x)$ , 则  $F(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 且  $F(a) = F(b) = 0$ . 由罗尔定理, 在  $(a, b)$  内至少存在一点  $\xi$  使  $F'(\xi) = 0$ , 即  $a(b-\xi)^{a-1} f(\xi) + (b-\xi)^a f'(\xi) = 0$ , 约去  $(b-\xi)^{a-1}$  得  $a f(\xi) + (b-\xi) f'(\xi) = 0$ , 即  $f(\xi) = \frac{b-\xi}{a} f'(\xi)$ .

**例 3.8** 设函数  $f(x)$  在  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$  上二阶可导, 且  $f(0) = f'(0)$ ,  $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ . 试证: 至少存在一点  $\xi \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ , 使得  $f''(\xi) = \frac{3f'(\xi)}{1-2\xi}$ .

**【分析】** 欲证结论可写为  $f''(\xi)(1-2\xi) - 2f'(\xi) = f'(\xi)$ .

令  $\xi = x$ , 则上式为

$$f''(x)(1-2x) - 2f'(x) = f'(x), \quad \text{即 } [f'(x)(1-2x)]' = f'(x).$$

根据拉格朗日中值定理的推论得  $f'(x)(1-2x) = f(x) + C$ . 令  $C = 0$ , 并移项得

$$f'(x)(1-2x) - f(x) = 0.$$

则令辅助函数  $F(x) = f'(x)(1-2x) - f(x)$ .

**证明** 做辅助函数  $F(x) = f'(x)(1-2x) - f(x)$ , 显然  $F(x)$  在  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$  上连续, 在  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$  内可导, 且

$$F(0) = f'(0)(1-0) - f(0) = 0, \quad F\left(\frac{1}{2}\right) = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(1-2 \cdot \frac{1}{2}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

$F(x)$  在  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$  上满足罗尔定理的条件, 则至少存在一点  $\xi \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ , 使  $F'(\xi) = 0$ , 即



$$f''(\xi)(1-2\xi)-3f'(\xi)=0, \text{ 亦即 } f''(\xi)=\frac{3f'(\xi)}{1-2\xi}.$$

## 2) 常数 $k$ 值法

此方法适用于常数部分可被分离出来的命题. 构造辅助函数的步骤如下:

(1) 令常数部分为  $k$ .

(2) 做恒等变形, 使上式一端为  $a$  及  $f(a)$  构成的代数式, 另一端为  $b$  及  $f(b)$  构成的代数式.

(3) 分析关于端点的表达式是否为对称式或轮换对称式. 若是, 只要把  $a$  (或  $b$ ) 改成  $x$ , 相应的函数值  $f(a)$  (或  $f(b)$ ) 改成  $f(x)$ , 则代换变量后的表达式就是所求的辅助函数  $F(x)$ .

**例 3.9** 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导. 证明: 在  $(a, b)$  内至少存在一点  $\xi$  使  $\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}=f(\xi)+\xi f'(\xi)$ .

**【分析】** 令  $\frac{bf(a)-af(a)}{b-a}=k \Rightarrow bf(b)-kb=af(a)-ka$  为轮换对称式.

**证明** 令  $F(x)=xf(x)-kx=xf(x)-\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}x$ , 则

$$F(b)-F(a)=bf(b)-\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}b-af(a)+\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}a=0,$$

所以  $F(x)$  在  $[a, b]$  上满足罗尔定理, 在  $(a, b)$  内至少存在一点  $\xi$  使  $F'(\xi)=0$ , 即

$$\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}=f(\xi)+\xi f'(\xi).$$

## 题型 3-3 证明存在 $\xi \in (a, b)$ , 使得 $f'(\xi)g(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$

**【解题思路】** 利用导数公式  $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=[f(x)g(x)]'$ , 找出辅助函数  $F(x)=f(x)g(x)$ .

**例 3.10** 设函数  $f(x), g(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 且  $g'(x) \neq 0$ . 证明存在一点  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $\frac{f(\xi)-f(a)}{g(b)-g(\xi)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ .

**证明** 将待证结论改写为  $f(\xi)g'(\xi)+f'(\xi)g(\xi)-f(a)g'(\xi)-g(b)f'(\xi)=0$ , 即

$$[f(x)g(x)]' \Big|_{x=\xi} - [f(a)g(x)+g(b)f(x)]' \Big|_{x=\xi} = 0,$$

$$([f(x)g(x)] - [f(a)g(x)+g(b)f(x)])' \Big|_{x=\xi} = 0.$$

令  $F(x)=[f(x)g(x)]-[f(a)g(x)+g(b)f(x)]$ , 则  $F(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 且  $F(a)=-f(a)g(b)=F(b)$ , 由罗尔定理, 存在一点  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $F'(\xi)=0$ , 即

$$\frac{f(\xi)-f(a)}{g(b)-g(\xi)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

## 题型 3-4 证明存在 $\xi \in (a, b)$ , 使得 $f'(\xi)g(\xi)-f(\xi)g'(\xi)=0$

**【解题思路】** 常将等式化为  $\frac{f'(\xi)g(\xi)-f(\xi)g'(\xi)}{g^2(\xi)}=\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' \Big|_{x=\xi}=0$ , 令  $F(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ .

特别地, 当  $g(\xi)=\xi$  时,  $g'(\xi)=1$ , 可令  $F(x)=\frac{f(x)}{x}$ .

**注** 凡遇到含导数的两个函数乘积只差时,常用上述求导公式找出辅助函数.

**例 3.11** 设函数  $f(x)$  在  $[0, 2]$  上连续, 在  $(0, 2)$  内可导, 且  $f(2) = 5f(0)$ , 证明存在  $\xi \in (0, 2)$  使得  $(1 + \xi^2)f'(\xi) = 2\xi f(\xi)$ .

**证明** 待证等式可写为  $(1 + x^2)f'(x) - 2xf(x) = 0$ , 即  $(1 + x^2)f'(x) - (1 + x^2)'f(x) = 0$ , 亦即  $\frac{(1 + x^2)f'(x) - (1 + x^2)'f(x)}{(1 + x^2)^2} = 0$ .

令  $F(x) = \frac{f(x)}{(1 + x^2)}$ , 则  $F(x)$  在  $[0, 2]$  上连续, 在  $(0, 2)$  内可导, 且

$$F(0) = f(0), \quad F(2) = \frac{f(2)}{5} = f(0).$$

由罗尔定理, 存在一点  $\xi \in (0, 2)$ , 使得  $F'(\xi) = 0$ , 即有

$$\frac{(1 + \xi^2)f'(\xi) - 2\xi f(\xi)}{(1 + \xi^2)^2} = 0, \quad \text{即 } (1 + \xi^2)f'(\xi) = 2\xi f(\xi).$$

**题型 3-5** 证明存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f'(\xi) + g'(\xi)f(\xi) = 0$

**【解题思路】** 可构造辅助函数  $F(x) = f(x)e^{g(x)}$ , 利用罗尔定理证明.

**例 3.12** 设函数  $f(x)$  在  $[-a, a]$  上连续, 在  $(-a, a)$  内可导, 且  $f(-a) = f(a)$ ,  $a > 0$ . 证明存在  $\xi \in (-a, a)$  使得证明存在  $f'(\xi) = 2\xi f(\xi)$ .

**证明** 待证结论改写为  $[f'(x) - 2xf(x)]|_{x=\xi} = 0$ .

令  $F(x) = f(x)e^{-x^2}$ , 则  $F(x)$  在  $[-a, a]$  上连续, 在  $(-a, a)$  内可导, 且

$$F(-a) = f(-a)e^{-(-a)^2} = f(a)e^{-a^2} = F(a).$$

由罗尔定理, 存在一点  $\xi \in (-a, a)$ , 使得  $F'(\xi) = 0$ , 即有

$$f'(\xi)e^{-\xi^2} - 2\xi e^{-\xi^2}f(\xi) = 0 \quad \text{故 } f'(\xi) = 2\xi f(\xi).$$

**例 3.13** 设奇函数  $f(x)$  在  $[-1, 1]$  上具有二阶导数, 且  $f(1) = 1$ , 证明:

(1) 存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使得  $f'(\xi) = 1$ ;

(2) 存在  $\eta \in (-1, 1)$ , 使得  $f''(\eta) + f'(\eta) = 1$ .

**证明** (1) 由于  $f(x)$  为奇函数, 则  $f(0) = 0$ . 由于  $f(x)$  在  $[-1, 1]$  上具有二阶导数, 由拉格朗日定理, 存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使得  $f'(\xi) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 1$ .

(2) 由于  $f(x)$  为奇函数, 则  $f'(x)$  为偶函数, 由(1)可知存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使得  $f'(\xi) = 1$ , 且  $f'(-\xi) = 1$ .

令  $\varphi(x) = e^x(f'(x) - 1)$ , 由条件显然可知  $\varphi(x)$  在  $[-\xi, \xi]$  上连续, 在  $(-\xi, \xi)$  内可导, 且  $\varphi(-\xi) = \varphi(\xi) = 0$ . 由罗尔定理可知, 存在  $\eta \in (-\xi, \xi) \subset (-1, 1)$ , 使得  $\varphi'(\eta) = 0$ , 即  $f''(\eta) + f'(\eta) = 1$ .

**题型 3-6** 证明存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $nf(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$ ,  $n$  为正整数

**【解题思路】** 可构造辅助函数  $F(x) = x^n f(x)$ , 利用罗尔定理证明.

**例 3.14** 设函数  $f(x)$  在  $[0, a]$  上连续, 在  $(0, a)$  内可导, 且  $f(a) = 0$ ,  $a > 0$ , 证明存在  $\xi \in (0, a)$  使得  $nf(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$  ( $n$  为正整数).

**证明** 令  $F(x) = x^n f(x)$ , 则  $F(x)$  在  $[0, a]$  上连续, 在  $(0, a)$  内可导, 且  $F(0) = F(a) = 0$ . 由罗尔定理, 存在一点  $\xi \in (0, a)$ , 使得  $F'(\xi) = 0$ , 即有



$$n\xi^{n-1}f(\xi) + \xi^n f'(\xi) = 0, \quad \text{故 } nf(\xi) + \xi f'(\xi) = 0.$$

**题型 3-7** 证明存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $\frac{f(\xi)}{g(\xi)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

**【解题思路】** 由  $\frac{f(\xi)}{g(\xi)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$  得  $f(\xi)g'(\xi) - f'(\xi)g(\xi) = 0$ , 可构造辅助函数  $F(x) = f(x)g'(x) - f'(x)g(x)$ , 利用罗尔定理证明.

**例 3.15** 设函数  $f(x), g(x)$  在  $[a, b]$  上二阶可导,  $g''(x) \neq 0$ , 且  $f(a) = f(b) = g(a) = g(b) = 0$ , 证明:

(1) 在  $(a, b)$  内  $g(x) \neq 0$ ;

(2) 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $\frac{f(\xi)}{g(\xi)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ .

**证明** (1) 反证法 假设存在  $c \in (a, b)$ , 使得  $g(c) = 0$ , 对  $g(x)$  在  $[a, c]$  和  $[c, b]$  上应用罗尔定理, 存在  $\xi_1 \in (a, c), \xi_2 \in (c, b)$ , 使得  $g'(\xi_1) = 0, g'(\xi_2) = 0$ . 对  $g'(x)$  在  $[\xi_1, \xi_2]$  上应用罗尔定理, 存在  $\xi_3 \in (\xi_1, \xi_2)$ , 使得  $g''(\xi_3) = 0$ . 这与条件  $g''(x) \neq 0$  矛盾, 故在  $(a, b)$  内  $g(x) \neq 0$ .

(2) 做辅助函数  $F(x) = f(x)g'(x) - f'(x)g(x)$ , 则  $F(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 且  $F(a) = F(b) = 0$ , 由罗尔定理, 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $F'(\xi) = 0$ , 即

$$f(\xi)g''(\xi) - f''(\xi)g(\xi) = 0, \quad \text{故 } \frac{f(\xi)}{g(\xi)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

**题型 3-8** 欲证结论: 在  $(a, b)$  内存在  $\xi, \eta$  且  $\xi \neq \eta$  满足某种关系式的命题的证明

**【解题思路】** 两次使用拉格朗日中值定理或两次使用柯西中值定理, 或一次拉格朗日中值定理、一次柯西中值定理, 然后再做某种运算, 证明中的辅助函数的做法不同于题型 3-5, 而是利用分离变量法, 使等式一端只含  $\xi$  的代数式, 另一端只含  $\eta$  的代数式, 结合原函数法稍加分析  $\xi, \eta$  的代数式, 即可看出该做什么样的辅助函数.

**例 3.16** 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 且  $f(a) = f(b) = 1$ , 证明存在  $\xi, \eta \in (a, b)$ , 使得  $e^{\eta-\xi}[f(\eta) + f'(\eta)] = 1$ .

**【分析】**  $e^{\eta-\xi}[f(\eta) + f'(\eta)] = 1 \Rightarrow e^{\eta}[f(\eta) + f'(\eta)] = e^{\xi} \Rightarrow [e^x f(x)]'_{x=\eta} = e^{\xi}$ .

**证明** (1) 令  $F(x) = e^x f(x)$ , 则由拉格朗日中值定理, 存在  $\eta \in (a, b)$ , 使得  $F'(\eta) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a}$ , 即  $e^{\eta}[f(\eta) + f'(\eta)] = \frac{e^b f(b) - e^a f(a)}{b - a} = \frac{e^b - e^a}{b - a} (f(a) = f(b) = 1)$ .

(2) 令  $\varphi(x) = e^x$ , 由拉格朗日中值定理, 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$\varphi'(\xi) = \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{b - a} = \frac{e^b - e^a}{b - a}, \quad \text{即 } e^{\xi} = \frac{e^b - e^a}{b - a}.$$

综合(1)(2)可得  $e^{\eta}[f(\eta) + f'(\eta)] = e^{\xi}$ , 即  $e^{\eta-\xi}[f(\eta) + f'(\eta)] = 1$ .

**例 3.17** 设函数  $f(x)$  在闭区间  $[0, 1]$  上连续, 在开区间  $(0, 1)$  内可导, 且  $f(0) = 0, f(1) = 1$ . 试证明: 对于任意给定的正数  $a$  和  $b$ , 在开区间  $(0, 1)$  内存在不同的  $\xi$  和  $\eta$ , 使得

$$\frac{a}{f'(\xi)} + \frac{b}{f'(\eta)} = a + b.$$

**证明** 取数  $\mu \in (0, 1)$ , 由连续函数介值定理知, 存在  $C \in (0, 1)$ , 使得  $f(C) = \mu$ . 在区间  $[0, C]$  与  $[C, 1]$  上分别应用拉格朗日中值定理, 有

$$f'(\xi) = \frac{f(C) - f(0)}{C - 0} = \frac{\mu}{C}, \quad 0 < \xi < C,$$

$$f'(\eta) = \frac{f(1) - f(C)}{1 - C} = \frac{1 - \mu}{1 - C}, \quad C < \eta < 1.$$

显然  $\xi \neq \eta$ . 由于  $\mu \in (0, 1)$ , 所以  $\mu \neq 0, 1 - \mu \neq 0$ , 即  $f'(\xi) \neq 0, f'(\eta) \neq 0$ . 从而

$$\frac{a}{f'(\xi)} + \frac{b}{f'(\eta)} = \frac{a}{\frac{\mu}{C}} + \frac{b}{\frac{1-\mu}{1-C}} = \frac{aC(1-\mu) + b\mu(1-C)}{\mu(1-\mu)} = \frac{b\mu + C(a - b\mu - a\mu)}{\mu(1-\mu)}.$$

注意到, 若取  $\mu = \frac{a}{a+b}$ , 则  $1 - \mu = \frac{b}{a+b}$ , 并且  $\mu, 1 - \mu \in (0, 1)$ , 代入上式得

$$\frac{a}{f'(\xi)} + \frac{b}{f'(\eta)} = \frac{\frac{ab}{a+b}}{\frac{a}{a+b} \cdot \frac{b}{a+b}} = a + b.$$

## 2. 不等式的证明

### 题型 3-9 用中值定理证明不等式

**【解题思路】** 该法适用于经过简单变形, 不等式的一端可写成  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$  或

$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$ , 或欲证命题是区间内“至少”一点  $\xi$  使命题成立.

步骤: (1) 在  $[a, b]$  上由题意做函数  $f(t), g(t)$ ;

(2) 写出微分中值公式  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$  或  $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ ;

(3) 根据需要对  $f'(\xi), g'(\xi)$  进行放缩.

**例 3.18** 设不恒为常数的函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导,  $f(a) = f(b)$ , 证明存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f'(\xi) > 0$ .

**证明** 因为  $f(a) = f(b)$  且  $f(x)$  不恒为常数的函数, 所以至少存在一点  $c \in (a, b)$ , 使得  $f(c) \neq f(a) = f(b)$ .

(1) 若  $f(c) > f(a) = f(b)$ , 显然  $f(x)$  在  $[a, c]$  上满足拉格朗日定理的条件, 则至少存在一个  $\xi \in (c, b) \subset [a, b]$ , 使得  $f'(\xi) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a} > 0$ .

(2) 若  $f(c) < f(a) = f(b)$ , 显然  $f(x)$  在  $[c, b]$  上满足拉格朗日定理的条件, 则至少存在一个  $\xi \in (c, b) \subset [a, b]$ , 使得  $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(c)}{b - c} > 0$ .

**例 3.19** 证明: 当  $0 < a < b < \pi$  时,  $b \sin b + 2 \cos b + \pi b > a \sin a + 2 \cos a + \pi a$ .

**证明** 令  $F(x) = x \sin x + 2 \cos x + \pi x$ . 当  $0 < a < b < \pi$  时, 由拉格朗日中值定理有

$$F(b) - F(a) = b \sin b + 2 \cos b + \pi b - (a \sin a + 2 \cos a + \pi a) = F'(\xi)(b - a).$$

而  $F'(\xi) = \xi \cos \xi - \sin \xi + \pi > 0$ , 则  $F'(\xi)(b - a) > 0$ , 从而有

$$b \sin b + 2 \cos b + \pi b - (a \sin a + 2 \cos a + \pi a) > 0, \quad \text{即}$$

$$b \sin b + 2 \cos b + \pi b > a \sin a + 2 \cos a + \pi a.$$

**例 3.20** 已知函数  $f(x)$  在区间  $[a, +\infty)$  上具有 2 阶导数,  $f(a) = 0, f'(x) > 0, f''(x) > 0$ . 设  $b > a$ , 曲线  $y = f(x)$  在点  $(b, f(b))$  处的切线与  $x$  轴的交点是  $(x_0, 0)$ , 证明  $a < x_0 < b$ .

**证明** 根据题意得点  $(b, f(b))$  处的切线方程为  $y - f(b) = f'(b)(x - b)$ .



令  $y=0$ , 得  $x_0 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$ . 因为  $f'(x) > 0$ , 所以  $f(x)$  单调递增. 又因为  $f(a) = 0$ , 所以  $f(b) > 0$ . 又因为  $f'(b) > 0$ , 所以  $x_0 = b - \frac{f(b)}{f'(b)} < b$ .

又因为  $x_0 - a = b - a - \frac{f(b)}{f'(b)}$ , 而在区间  $(a, b)$  中应用拉格朗日中值定理有

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi), \quad \xi \in (a, b),$$

所以  $x_0 - a = b - a - \frac{f(b)}{f'(b)} = \frac{f(b)}{f'(\xi)} - \frac{f(b)}{f'(b)} = f(b) \frac{f'(b) - f'(\xi)}{f'(b)f'(\xi)}$ .

因为  $f''(x) > 0$ , 所以  $f'(x)$  单调递增, 所以  $f'(b) > f'(\xi)$ , 故  $x_0 - a > 0$ , 即  $x_0 > a$ , 所以  $a < x_0 < b$ , 结论得证.

### 题型 3-10 用单调性证明不等式

**【解题思路】** 该方法适用于某区间上成立的不等式, 对于数值不等式通常是通过辅助函数完成的.

步骤:

(1) 移项(有时需要做简单的恒等变形), 使不等式一端为 0, 另一端即为所做的辅助函数;

(2) 求  $f'(x)$  并验证  $f(x)$  在指定区间的增减性;

(3) 求出区间端点的函数值(或极值), 作比较即得所证.

**例 3.21** 证明: (1)  $1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \geq \sqrt{1+x^2}, x \in (-\infty, +\infty)$ ;

(2)  $\ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} (x > -1)$ ; (3)  $e^x > 1+x$ .

**证明** (1) 设  $f(x) = 1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$ , 则

$$f'(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + x \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$

令  $f'(x) = 0$ , 得到驻点  $x = 0$ . 由  $f''(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} > 0$ , 可知  $x = 0$  为极小值点, 亦即最小值点, 最小值为  $f(0) = 0$ , 于是对任意  $x \in (-\infty, +\infty)$  有  $f(x) \geq 0$ , 即所证不等式成立.

(2) 设  $f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$ , 则  $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x - x^2 = \frac{-x^3}{1+x} > 0$ .

令  $f'(x) = 0$ , 得  $x = 0$  及  $f(0) = 0$ .

当  $-1 < x < 0$  时,  $f'(x) > 0$ ,  $f(x)$  在  $(-1, 0]$  上单调增加. 当  $x > 0$  时,  $f'(x) < 0$ ,  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上单调减少. 故  $f(x)$  在  $x = 0$  处取得极大值  $f(0) = 0$ , 因为唯一, 所以也是最大值. 所以, 对于任意  $x > -1$  有  $f(x) \leq 0$ , 即

$$f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \leq 0, \quad \text{故 } \ln(1+x) \leq x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3.$$

(3) 设  $x < 0$ , 试证  $e^x > 1 + x$ .

证法一 用中值定理

设  $f(t) = e^t - 1 - t$ , 则①  $f(t)$  在  $[x, 0]$  上连续; ②  $f(t)$  在  $(x, 0)$  内可导, 且  $f'(t) = e^t - 1$ ,

则存在  $\xi \in (x, 0)$ , 使  $f'(\xi) = \frac{f(0) - f(x)}{0 - x}$ , 即  $x(e^\xi - 1) = e^x - 1 - x$ .

因为  $\xi < 0$ , 故  $0 < e^\xi < 1$ . 又因为  $x < 0$ , 故  $x(e^\xi - 1) > 0$ , 从而  $e^x - 1 - x > 0$ , 即  $e^x > 1 + x$ .

证法二 用函数的单调性

设  $f(x) = e^x - 1 - x$ , 则  $f'(x) = e^x - 1$ , 因为  $x < 0$ , 故  $e^x - 1 < 0$ , 即  $f'(x) < 0$ , 从而当  $x < 0$  时  $f(x)$  是单调减少的. 又  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1 - x) = 0$ , 所以当  $x < 0$  时, 有  $f(x) > f(0) = 0$ , 即  $e^x - 1 - x > 0$ , 故  $e^x > 1 + x$ .

**例 3.22** 设  $e < a < b < e^2$ , 证明  $\ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(b - a)$ .

**【分析】** 根据要证不等式的形式, 可考虑用拉格朗日中值定理或转化为函数不等式用单调性证明.

**证明** 证法一 对函数  $\ln^2 x$  在  $[a, b]$  上应用拉格朗日中值定理, 得

$$\ln^2 b - \ln^2 a = \frac{2 \ln \xi}{\xi} (b - a), \quad a < \xi < b.$$

设  $\varphi(t) = \frac{\ln t}{t}$ , 则  $\varphi'(t) = \frac{1 - \ln t}{t^2}$ . 当  $t > e$  时,  $\varphi'(t) < 0$ , 所以  $\varphi(t)$  单调减少, 从而  $\varphi(\xi) > \varphi(e^2)$ , 即  $\frac{\ln \xi}{\xi} > \frac{\ln e^2}{e^2} = \frac{2}{e^2}$ , 故  $\ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(b - a)$ .

本题也可设辅助函数为  $\varphi(x) = \ln^2 x - \ln^2 a - \frac{4}{e^2}(x - a)$ ,  $e < a < x < e^2$  或  $\varphi(x) = \ln^2 b - \ln^2 x - \frac{4}{e^2}(b - x)$ ,  $e < x < b < e^2$ , 再用单调性进行证明即可.

证法二 设  $\varphi(x) = \ln^2 x - \frac{4}{e^2}x$ , 则  $\varphi'(x) = 2 \frac{\ln x}{x} - \frac{4}{e^2}$ ,  $\varphi''(x) = 2 \frac{1 - \ln x}{x^2}$ . 所以, 当  $x > e$  时,  $\varphi''(x) < 0$ , 故  $\varphi'(x)$  单调减少, 从而当  $e < x < e^2$  时,

$$\varphi'(x) > \varphi'(e^2) = \frac{4}{e^2} - \frac{4}{e^2} = 0,$$

即当  $e < x < e^2$  时,  $\varphi(x)$  单调增加. 因此当  $e < a < b < e^2$  时,  $\varphi(b) > \varphi(a)$ , 即

$$\ln^2 b - \frac{4}{e^2}b > \ln^2 a - \frac{4}{e^2}a, \text{ 故 } \ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(b - a).$$

**例 3.23** 证明: 当  $x > 0$  时,  $(1+x)\ln^2(1+x) < x^2$ .

**证明** 只需证  $\frac{x}{\sqrt{1+x}} > \ln(1+x)$ . 令  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}} - \ln(1+x)$  ( $x \geq 0$ ), 则  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上可导, 且当  $x > 0$  时

$$f'(x) = \frac{\sqrt{1+x} - \frac{x}{\sqrt{1+x}}}{1+x} - \frac{1}{1+x} = \frac{2+x-2\sqrt{1+x}}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}} = \frac{(\sqrt{1+x}-1)^2}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}} > 0,$$

所以  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上单调增加; 当  $x > 0$  时,  $f(x) > f(0) = 0$ .



**例 3.24** 证明: 当  $0 < a < b < \pi$  时,  $b \sin b + 2 \cos b + \pi b > a \sin a + 2 \cos a + \pi a$ .

**【分析】** 本题与例 3.19 是同一题目, 这里利用“参数变易法”构造辅助函数, 再利用函数的单调性证明.

**证明** 令  $f(x) = x \sin x + 2 \cos x + \pi x - a \sin a - 2 \cos a - \pi a$ ,  $0 < a \leq x \leq b < \pi$ , 则

$f'(x) = \sin x + x \cos x - 2 \sin x + \pi = x \cos x - \sin x + \pi$ , 且  $f'(\pi) = 0$ .

又  $f''(x) = \cos x - x \sin x - \cos x = -x \sin x < 0$ , ( $0 < x < \pi$  时,  $\sin x > 0$ ), 故当  $0 < a \leq x \leq b < \pi$  时,  $f'(x)$  单调减少, 即  $f'(x) > f'(\pi) = 0$ , 则  $f(x)$  单调增加, 于是  $f(b) > f(a) = 0$ , 即  $b \sin b + 2 \cos b + \pi b > a \sin a + 2 \cos a + \pi a$ .

### 题型 3-11 用泰勒公式证明不等式

**【解题思路】** 该法适用于题设中函数  $f(x)$  具有二阶和二阶以上可导, 且最高阶导数的大小或上下界可知的命题.

步骤: (1) 写出比最高阶导数低一阶的函数的泰勒展开;

(2) 恰当选择等式两边的  $x$  或  $x_0$ ;

(3) 根据所给的最高阶导数的大小或界对展开式进行放缩.

**例 3.25** 设  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$  且  $f''(x) > 0$ , 证明  $f(x) > x$ .

**证明** 由  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$  可知,  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$ .

因为  $f(x)$  二阶可导, 所以  $f(x)$  在  $x=0$  处展成一阶泰勒公式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{x^2}{2}f''(\xi), \quad \xi \text{ 介于 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间.}$$

由于  $f''(x) > 0$ , 所以  $f''(\xi) > 0$ , 于是有

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{x^2}{2}f''(\xi) > f(0) + f'(0)x = x, \quad \text{即 } f(x) > x.$$

**例 3.26** 已知函数  $f(x)$  二阶可导, 且  $f(x) > 0$ ,  $f(0) = 1$ ,  $f'(0) = 1$ ,  $f(x)f''(x) - (f'(x))^2 > 0$ . 证明:  $f(x) \geq e^x$ .

**证明** 令  $g(x) = \ln f(x)$ , 则  $g(0) = 0$ , 且

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}, \quad g'(0) = 1; \quad g''(x) = \frac{f(x)f''(x) - (f'(x))^2}{f^2(x)} > 0.$$

所以  $g(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{g''(\xi)}{2}x^2 = x + \frac{g''(\xi)}{2}x^2 \geq x$ , 从而  $f(x) \geq e^x$ .

**例 3.27** 设  $f(x)$  在区间  $[a, +\infty)$  上具有二阶导数, 且  $|f(x)| \leq M_0$ ,  $0 < |f''(x)| \leq M_2$ , ( $a \leq x < +\infty$ ). 证明  $|f'(x)| \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$ .

**证明** 对任意的  $x \in [a, +\infty)$  及任意的  $h > 0$ , 有  $x+h \in (a, +\infty)$ , 于是

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2!}f''(\xi)h^2, \quad \text{其中 } \xi \in [h, x+h],$$

即  $f'(x) = \frac{1}{h}[f(x+h) - f(x)] - \frac{h}{2}f''(\xi)$ , 故

$$|f'(x)| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{h}{2}M_2, \quad x \in [a, +\infty), h > 0.$$

令  $g(h) = \frac{2M_0}{h} + \frac{h}{2}M_2$ , 试求其最小值. 取  $g'(h) = -\frac{2M_0}{h^2} + \frac{1}{2}M_2 = 0$ , 得到  $h_0 = 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}$ .

而  $g''(h) = \frac{4M_0}{h^3} > 0$ , 所以,  $g(h)$  在  $h_0 = 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}$  处得极小值, 亦即最小值. 而  $g(h_0) = 2\sqrt{M_0 M_2}$ , 故

$$|f'(x)| \leq 2\sqrt{M_0 M_2}, \quad x \in [a, +\infty).$$

### 题型 3-12 利用函数的凸性证明不等式

**【解题思路】** 若  $F(x)$  在  $(a, b)$  内二阶可导,  $x_1, x_2$  为  $(a, b)$  内任意两点.

(1) 若  $F''(x) > 0, x \in (a, b)$ , 则  $F(x)$  在  $(a, b)$  内为下凸函数, 即

$$F\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{F(x_1) + F(x_2)}{2},$$

或  $F(px_1 + qx_2) < pF(x_1) + qF(x_2)$ , 其中  $p + q = 1, p > 0, q > 0$ .

(2) 若  $F''(x) < 0, x \in (a, b)$ , 则  $F(x)$  在  $(a, b)$  内为上凸函数, 即

$$F\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{F(x_1) + F(x_2)}{2},$$

或  $F(px_1 + qx_2) > pF(x_1) + qF(x_2)$ , 其中  $p + q = 1, p > 0, q > 0$ .

**例 3.28** 证明:  $x \ln x + y \ln y > (x + y) \ln \frac{x + y}{2} (x > 0, y > 0, x \neq y)$ .

**证明** 设  $f(u) = u \ln u$ , 则  $f'(u) = \ln u + 1, f''(u) = \frac{1}{u} > 0 (u > 0)$ , 故函数  $f(u) = u \ln u$  在  $(0, +\infty)$  上是下凸的. 任取  $x, y \in (0, +\infty), x \neq y$ , 有  $f\left(\frac{x + y}{2}\right) < \frac{f(x) + f(y)}{2}$ , 所以

$$\frac{x + y}{2} \ln \frac{x + y}{2} < \frac{x \ln x + y \ln y}{2},$$

即  $x \ln x + y \ln y > (x + y) \ln \frac{x + y}{2} (x > 0, y > 0, x \neq y)$ .

**例 3.29** 设函数  $f(x)$  具有二阶导数,  $g(x) = f(0)(1 - x) + f(1)x$ , 则在  $[0, 1]$  上( ).

- A. 当  $f'(x) \geq 0$  时,  $f(x) \geq g(x)$       B. 当  $f'(x) \geq 0$  时,  $f(x) \leq g(x)$   
C. 当  $f''(x) \geq 0$  时,  $f(x) \geq g(x)$       D. 当  $f''(x) \geq 0$  时,  $f(x) \leq g(x)$

**【分析】** 此题考查的曲线的凹凸性的定义及判断方法.

**解** 显然  $g(x) = f(0)(1 - x) + f(1)x$  就是连接  $(0, f(0)), (1, f(1))$  两点的直线方程.

故当  $f''(x) \geq 0$  时, 曲线是下凸的, 也就有  $f(x) \leq \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0}x + f(0)$ , 即

$$f(x) \leq f(0)(1 - x) + f(1)x = g(x),$$

也就是  $f(x) \leq g(x)$ , 应该选 D.

## 3. 导数的应用

### 题型 3-13 函数单调性的判别法、极值的求法

#### 1) 求函数的单调区间

**【解题思路】** 函数  $y = f(x)$  的导函数  $y' = f'(x)$  保持不变号的区间称为单调区间, 因而求可导函数的单调区间就是求导函数的正负区间, 而相邻的两个单调区间的分界点就是极值点, 求单调区间的步骤:



- (1) 写出  $y=f(x)$  的定义域;
- (2) 求出  $y'=f'(x)$ ;
- (3) 解方程  $f'(x)=0$  求出驻点,并找出不可导的点;
- (4) 用驻点和不可导的点将  $f(x)$  的定义域分成若干个区间;
- (5) 在每个子区间上确定导数  $f'(x)$  的符号及  $f(x)$  的单调性.

## 2) 求函数的极值

### 【解题思路及步骤】

- (1) 写出  $y=f(x)$  的定义域;
- (2) 求出  $y'=f'(x)$ ,解方程  $f'(x)=0$  求出驻点,并找出不可导的点;
- (3) 利用第一充分条件判断驻点和不可导的点是否为极值点;
- (4) 求出  $f(x)$  的极值.

### 例 3.30 判断题

- (1) 若  $f(x_1)$  为函数  $f(x)$  的极小值,  $f(x_2)$  为  $f(x)$  的极大值,则必有  $f(x_1) < f(x_2)$ ;
- (2) 若  $x_0$  是函数  $f(x)$  的极值点,则  $f'(x_0)=0$ .

解 (1) 错,因为极大值有可能小于极小值,极值是局部的;  
 (2) 错,因为导数不存在的点也有可能是极值点.

例 3.31 (1) 讨论函数  $y=\sqrt{3}\arctan x-2\arctan \frac{x}{\sqrt{3}}$  的单调性,并求其极值.

(2) 设  $y=x^3+ax^2+bx+c$  在  $x=1, x=2$  处取得极值,求  $a, b$  的值,并判断  $y(1), y(2)$  是极大值还是极小值.

解 (1) 因为  $y'=\sqrt{3}\frac{1}{1+x^2}-2\frac{1}{1+\frac{x^2}{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}(1-x^2)}{(1+x^2)(3+x^2)}$ ,所以驻点为  $x=\pm 1$ ,

$x$	$(-\infty, -1)$	$-1$	$(-1, 1)$	$1$	$(1, +\infty)$
$y'$	—	0	+	0	—
$y$	减少	极小值	增加	极大值	减少

极小值为  $y(-1)=-\frac{\sqrt{3}\pi}{4}+\frac{\pi}{3}$ ,极大值为  $y(1)=\frac{\sqrt{3}\pi}{4}-\frac{\pi}{3}$ .

(2) 因为  $y'=3x^2+2ax+b$ ,依题意得  $3+2a+b=0, 12+4a+b=0$ .

联立解之,得  $a=-\frac{9}{2}, b=6$ . 又  $y''=6x+2a=6x-9, y''(1)=-3<0, y''(2)=3>0$ ,所以  $y(1)$  为极大值,  $y(2)$  为极小值.

例 3.32 设函数  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上可导,且  $f(0)=0, f'(x)$  单调增加. 证明  $\frac{f(x)}{x}$  在  $(0, +\infty)$  上单调增加.

证明  $\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2} = \frac{xf'(x)-(f(x)-f(0))}{x^2} = \frac{xf'(x)-xf'(\xi)}{x^2}$   
 $= \frac{x(f'(x)-f'(\xi))}{x^2} > 0, \xi$  在 0 和  $x$  之间,

所以  $\frac{f(x)}{x}$  在  $(0, +\infty)$  上单调增加.

**例 3.33** 设函数  $f(x)$  是可导函数, 且满足  $f(x)f'(x) > 0$ , 则( ).

A.  $f(1) > f(-1)$

B.  $f(1) < f(-1)$

C.  $|f(1)| > |f(-1)|$

D.  $|f(1)| < |f(-1)|$

**解** 设  $g(x) = (f(x))^2$ , 则  $g'(x) = 2f(x)f'(x) > 0$ , 也就是  $(f(x))^2$  是单调增加函数. 也就得到  $(f(1))^2 > (f(-1))^2 \Rightarrow |f(1)| > |f(-1)|$ , 所以应该选 C.

**例 3.34** 设函数  $y = f(x)$  由方程  $y^3 + xy^2 + x^2y + 6 = 0$  确定, 求  $f(x)$  的极值.

**解** 在方程两边同时对  $x$  求导一次, 得到

$$(3y^2 + 2xy + x^2)y' + (y^2 + 2xy) = 0, \quad (1)$$

即  $\frac{dy}{dx} = \frac{-y^2 - 2xy}{3y^2 + 2xy + x^2}$ . 令  $\frac{dy}{dx} = 0$  及  $y^3 + xy^2 + x^2y + 6 = 0$ , 得到函数唯一驻点  $x = 1, y = -2$ .

在(1)式两边同时对  $x$  求导一次, 得到

$$(6yy' + 4y + 2xy' + 4x)y' + (3y^2 + 2xy + x^2)y'' + 2y = 0.$$

把  $x = 1, y = -2, y'(1) = 0$  代入, 得到  $y''(1) = \frac{4}{9} > 0$ , 所以函数  $y = f(x)$  在  $x = 1$  处取得极小值  $y = -2$ .

### 3) 曲线的凸性及拐点

#### 题型 3-14 凸性及拐点的判定

**【解题思路】** 根据二阶导数的符号判定曲线的凸性及求拐点

**判别方法一** 设函数  $f(x)$  在  $x_0$  的某一邻域内二阶可导, 且  $f''(x_0) = 0$  且在  $x_0$  的左右两侧  $f''(x)$  异号, 则  $(x_0, f(x_0))$  为曲线  $y = f(x)$  的拐点; 若在  $x_0$  的左右两侧  $f''(x)$  同号, 则  $(x_0, f(x_0))$  不是曲线  $y = f(x)$  的拐点.

**判别方法二** 设函数  $f(x)$  在  $x_0$  的某一邻域内二阶可导, 若  $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ ,  $f'''(x_0) \neq 0$ , 则  $(x_0, f(x_0))$  为曲线  $y = f(x)$  的拐点.

一般地, 若函数  $f(x)$  在  $x_0$  处具有二阶以上的  $n$  阶导数, 且

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0,$$

则当  $n$  为奇数时,  $(x_0, f(x_0))$  为曲线  $y = f(x)$  的拐点.

**判别方法三** 设函数  $f(x)$  在  $x_0$  处连续,  $f''(x_0)$  不存在, 若在  $x_0$  的左右两侧  $f''(x)$  异号, 则  $(x_0, f(x_0))$  为曲线  $y = f(x)$  的拐点; 若在  $x_0$  的左右两侧  $f''(x)$  同号, 则  $(x_0, f(x_0))$  不是曲线  $y = f(x)$  的拐点.

曲线的拐点只可能在二阶导数为零的点和二阶导数不存在的点处出现.

#### 例 3.35 判断题

(1) 若  $(x_0, f(x_0))$  为曲线  $y = f(x)$  的拐点, 则  $f''(x_0) = 0$ .

(2) 若  $f''(x_0) = 0$ , 则  $(x_0, f(x_0))$  必为  $y = f(x)$  的拐点.

**解** (1) 错, 在拐点的横坐标处, 函数的二阶导数可能不存在.

(2) 错,  $f''(x_0) = 0$ ,  $(x_0, f(x_0))$  可能不是  $y = f(x)$  的拐点.

**例 3.36** 若  $f(x)$  二阶可导, 且  $f(-x) = -f(x)$ ,  $x \in (0, +\infty)$  时,  $f'(x) > 0, f''(x) > 0$ , 则在  $(-\infty, 0)$  内曲线  $y = f(x)$  ( ).



A. 单调下降, 曲线是下凸的

B. 单调下降, 曲线是上凸的

C. 单调上升, 曲线是下凸的

D. 单调上升, 曲线是上凸的

解 因为  $f(-x) = -f(x)$ , 所以  $f(x)$  为奇函数,  $f'(x)$  为偶函数,  $f''(x)$  为奇函数, 则当  $x \in (0, +\infty)$  时,  $f'(-x) = f'(x) > 0$ ,  $f''(-x) = -f''(x) < 0$ , 从而  $x \in (-\infty, 0)$  时,  $f'(x) > 0$ ,  $f''(x) < 0$ , 在  $(-\infty, 0)$  内, 曲线  $y = f(x)$  单调增加, 上凸. 故选 D.

例 3.37 求函数  $y = (x-1)\sqrt[3]{x^5}$  的凹凸区间及拐点.

解 函数的定义域为  $(-\infty, +\infty)$ ,  $y' = \frac{8}{3}x^{\frac{5}{3}} - \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$ ,  $y'' = \frac{104x-1}{9\sqrt[3]{x}}$ .

令  $y'' = 0$  得  $x = \frac{1}{4}$ , 而  $x = 0$  在  $y''$  处不存在.

$x$	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \frac{1}{4})$	$\frac{1}{4}$	$(\frac{1}{4}, +\infty)$
$y''$	+	不存在	-	0	+
$y$	凹	拐点	凸	拐点	凹

因为  $y(0) = 0$ ,  $y(\frac{1}{4}) = -\frac{3}{16\sqrt[3]{16}}$ , 所以拐点为  $(0, 0)$  和  $(\frac{1}{4}, -\frac{3}{16\sqrt[3]{16}})$ .

例 3.38 设  $f(x) = |x(1-x)|$ , 则( ).

A.  $x=0$  是  $f(x)$  的极值点, 但  $(0, 0)$  不是曲线  $y = f(x)$  的拐点

B.  $x=0$  不是  $f(x)$  的极值点, 但  $(0, 0)$  是曲线  $y = f(x)$  的拐点

C.  $x=0$  是  $f(x)$  的极值点, 且  $(0, 0)$  是曲线  $y = f(x)$  的拐点

D.  $x=0$  不是  $f(x)$  的极值点,  $(0, 0)$  也不是曲线  $y = f(x)$  的拐点

【分析】由于  $f(x)$  在  $x=0$  处的一、二阶导数不存在, 可利用定义判断极值情况, 考查  $f(x)$  在  $x=0$  的左、右两侧的二阶导数的符号, 判断拐点情况.

解 设  $0 < \delta < 1$ , 当  $x \in (-\delta, 0) \cup (0, \delta)$  时,  $f(x) > 0$ , 而  $f(0) = 0$ , 所以  $x=0$  是  $f(x)$  的极小值点.

显然,  $x=0$  是  $f(x)$  的不可导点. 当  $x \in (-\delta, 0)$  时,  $f(x) = -x(1-x)$ ,  $f''(x) = 2 > 0$ , 当  $x \in (0, \delta)$  时,  $f(x) = x(1-x)$ ,  $f''(x) = -2 < 0$ , 所以  $(0, 0)$  是曲线  $y = f(x)$  的拐点. 故选 C.

注 对于极值情况, 也可考查  $f(x)$  在  $x=0$  的某去心邻域内的一阶导数的符号来判断.

例 3.39 设函数  $f(x)$  满足关系  $f''(x) = x - (f'(x))^2$ , 且  $f'(0) = 0$ , 证明: 点  $(0, f(0))$  是曲线  $y = f(x)$  的拐点.

证明 由关系式, 令  $x=0$ , 得  $f''(0) = 0$ . 等式两端求导, 得  $f'''(x) = 1 - 2f'(x)f''(x)$ , 因此  $f'''(0) = 1$ .

再由  $f'''(x)$  的连续性可知, 在  $x=0$  附近,  $f'''(x) > 0$ , 所以  $f''(x)$  单增,  $f''(x)$  在  $x=0$  的两侧异号, 点  $(0, f(0))$  是曲线  $y = f(x)$  的拐点.

例 3.40 设函数  $y = y(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上可导, 且满足  $y' = x^2 + y^2$ ,  $y(0) = 0$ .

(1) 研究  $y(x)$  在区间  $(0, +\infty)$  的单调性和曲线  $y = y(x)$  的凹凸性;

(2) 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y(x)}{x^3}$ .

解 (1) 当  $x > 0$  时, 有  $y' - x^2 + y^2 > 0$ , 故  $y(x)$  在区间  $(0, +\infty)$  单调增加. 从而当  $x > 0$  时,  $y' = x^2 + y^2$  也单调增加. 可见, 曲线  $y = y(x)$  在区间  $(0, +\infty)$  向下凸.

或当  $x > 0$  时, 可得  $y'' = 2x + 2y \cdot y' = 2x + 2y(x^2 + y^2) > 0$ . 可见, 曲线  $y = y(x)$  在区间  $(0, +\infty)$  向下凸.

(2) 由题设知,  $y(0) = y'(0) = 0$ . 应用洛必达法则有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y'(x)}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + y^2}{3x^2} = \frac{1}{3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3} \left( \frac{y}{x} \right)^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} [y'(0)]^2 = \frac{1}{3}.$$

4) 曲线的渐近线

### 题型 3-15 求渐近线

【解题思路】 求渐近线就是按定义求极限, 渐近线分为水平渐近线、垂直渐近线和斜渐近线.

水平渐近线: 若  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$  或  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ , 则  $y = b$  称为函数  $y = f(x)$  的水平渐近线.

铅直渐近线: 若  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$  或  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$ , 则  $x = x_0$  称为函数  $y = f(x)$  的铅直渐近线.

斜渐近线: 若  $a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ ,  $b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax]$ , 则  $y = ax + b$  称为函数  $y = f(x)$  的斜渐近线. 学习渐近线应注意函数的图形不一定有渐近线.

例 3.41 讨论函数  $y = \ln\left(3 - \frac{e}{x}\right)$  的单调性、凹凸性, 并求极值与拐点及渐近线方程.

解 函数的定义域为  $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{e}{3}, +\infty\right)$ .  $y' = \frac{1}{3 - \frac{e}{x}} \cdot \frac{e}{x^2} = \frac{e}{x(3x - e)} > 0$ , 故  $y = \ln\left(3 - \frac{e}{x}\right)$  在定义域内没有驻点, 也没有导数不存在的点. 取  $y'' = -\frac{e(6x - e)}{x^2(3x - e)^2} = 0$ , 得  $x = \frac{e}{6}$ , 而  $\frac{e}{6}$  不在  $y = \ln\left(3 - \frac{e}{x}\right)$  的定义域内.

当  $x \in (-\infty, 0)$  时,  $y'' < 0$ , 故  $y = \ln\left(3 - \frac{e}{x}\right)$  在  $(-\infty, 0)$  上单增上凸; 当  $x \in \left(\frac{e}{3}, +\infty\right)$  时,  $y'' > 0$ , 故  $y = \ln\left(3 - \frac{e}{x}\right)$  在  $\left(\frac{e}{3}, +\infty\right)$  上单增下凸.

又  $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(3 - \frac{e}{x}\right) = \ln 3$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \ln\left(3 - \frac{e}{x}\right) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{e}{3}\right)^+} \ln\left(3 - \frac{e}{x}\right) = -\infty$ , 故曲线  $y = \ln\left(3 - \frac{e}{x}\right)$  水平渐近线为  $y = \ln 3$ , 铅直渐近线为  $x = 0$  和  $x = \frac{e}{3}$ .

例 3.42 求曲线  $y = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$  渐近线.

解  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} = 1$ , 故  $y = 1$  为水平渐近线;  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} = \infty$ , 故  $x = 1$  为铅直渐近线. 没有斜渐近线.



例 3.43 下列曲线有渐近线的是( ).

A.  $y = x + \sin x$

B.  $y = x^2 + \sin x$

C.  $y = x + \sin \frac{1}{x}$

D.  $y = x^2 + \sin \frac{1}{x}$

解 A. 因为  $\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} (x + \sin x) = \infty$ , 所以  $y = x + \sin x$  没有水平渐近线; 因为不存在  $x_0$ , 使得  $\lim_{x \rightarrow x_0} (x + \sin x) = \infty$ , 所以  $y = x + \sin x$  没有铅直渐近线; 因为  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} (y - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x + \sin x - x)$  不存在, 所以  $y = x + \sin x$  没有斜渐近线.

B. 类似讨论  $y = x^2 + \sin x$  没有渐近线.

C.  $y = x + \sin \frac{1}{x}$  没有水平渐近线和铅直渐近线. 因为  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin \frac{1}{x}}{x} = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} (y - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( x + \sin \frac{1}{x} - x \right) = 0$ , 所以  $y = x + \sin \frac{1}{x}$  有斜渐近线  $y = x$ .

D.  $y = x^2 + \sin \frac{1}{x}$  没有渐近线.

故选 C.

#### 5) 方程根的存在与界定

题型 3-16 关于方程  $f(x) = 0$  的根(或  $f(x)$  的零点)的存在性的讨论

【解题思路】 一般用零点存在定理或罗尔定理证明

例 3.44 不用求出函数  $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$  的导数, 说明方程  $f'(x) = 0$  有几个实根, 并指出它们所在的区间.

解 因  $f(1) = f(2) = 0$ , 根据罗尔定理知: 存在  $\xi_1 \in (1, 2)$ , 使得  $f'(\xi_1) = 0$ ; 同理, 因  $f(2) = f(3) = 0$ , 根据罗尔定理知: 存在  $\xi_2 \in (2, 3)$ , 使得  $f'(\xi_2) = 0$ .

又由于  $f'(x)$  是二次函数, 最多只有两个不相等的实根, 故  $f'(x) = 0$  的两个实根分别为  $\xi_1 \in (1, 2)$ ,  $\xi_2 \in (2, 3)$ .

例 3.45 设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  为满足  $a_1 - \frac{a_2}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{a_n}{2n-1} = 0$  的实数, 试证明方程  $a_1 \cos x + a_2 \cos 3x + \dots + a_n \cos(2n-1)x = 0$ , 在  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  内至少存在一个实根.

证明 作辅助函数  $f(x) = a_1 \sin x + \frac{1}{3} a_2 \sin 3x + \dots + \frac{1}{2n-1} a_n \sin(2n-1)x$ .

显然  $f(x)$  在  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  上连续, 在  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  内可导, 且  $f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ , 故由罗尔定理知, 至少存在一点  $\xi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  使  $f'(\xi) = 0$ . 即

$$f'(\xi) = a_1 \cos \xi + a_2 \cos 3\xi + \dots + a_n \cos(2n-1)\xi = 0,$$

从而题设方程在  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  内至少有一个实根.

例 3.46 设正整数  $n > 1$ , 证明方程  $x^{2n} + a_1 x^{2n-1} + \dots + a_{2n-1} x - 1 = 0$  至少有两个实根.

**证明** 设  $f(x) = x^{2n} + a_1 x^{2n-1} + \cdots + a_{2n-1} x - 1$ , 则其在区间  $(-\infty, +\infty)$  上连续, 且  $f(0) = -1, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$ . 因而, 必存在  $x_1 > 0$ , 使得  $f(x_1) > 0$ . 由连续函数的零点定理可知, 至少有一点  $\xi_1 \in (0, x_1)$ , 使得  $f(\xi_1) = 0$ .

同理, 必存在  $x_2 < 0$ , 使得  $f(x_2) > 0$ . 由连续函数的介值定理可知, 至少有一点  $\xi_2 \in (x_2, 0)$ , 使得  $f(\xi_2) = 0$ .

综上所述, 方程  $x^{2n} + a_1 x^{2n-1} + \cdots + a_{2n-1} x - 1 = 0$  至少有两个实根.

### 题型 3-17 方程 $f(x) = 0$ 的根的个数的讨论

**【解题思路】** (1) 求出  $f(x)$  的驻点或导数不存在的点, 确定  $f(x)$  的单调增减性区间;  
(2) 求出单调区间和极值(或最值);  
(3) 分析极值(或最值)与  $x$  轴的相对位置.

**例 3.47** 试讨论方程  $xe^{-x} = a (a > 0)$  的实根.

**解** 令  $F(x) = xe^{-x} - a$ , 则方程  $xe^{-x} = a$  实根的个数就是  $F(x)$  的零点的个数. 令

$$F'(x) = (1-x)e^{-x} = 0 \Rightarrow x = 1.$$

$x$	$(-\infty, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$F'(x)$	+	0	-
$F(x)$	↑	$(e^{-1} - a)$ 极大值	↓

$x=1$  是  $F(x)$  的唯一驻点,  $F(1) = e^{-1} - a$  为  $(-\infty, +\infty)$  上的极大值, 因此也是最大值. 以下就  $F(1) = e^{-1} - a$  与  $x$  轴的相对位置讨论  $F(x)$  的零点.

(1) 若  $F(1) = e^{-1} - a < 0$ ,  $F(x) = xe^{-x} - a$  与  $x$  轴不会有交点, 因此  $F(x)$  没有零点.

(2) 若  $F(1) = e^{-1} - a = 0$ ,  $(1, e^{-1} - a)$  位于  $x$  轴上,  $F(x) = xe^{-x} - a$  与  $x$  轴只有一个交点  $(1, e^{-1} - a)$ , 因此  $F(x)$  有唯一的零点.

(3)  $F(1) = e^{-1} - a > 0$ ,  $(1, e^{-1} - a)$  位于  $x$  轴上方,  $F(x)$  在  $(-\infty, 1)$  上单调增加, 且  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^{-x} - a) = -\infty$ , 由此可知  $F(x)$  在  $(-\infty, 1)$  内有且仅有唯一的零点;  $F(x)$  在  $(1, +\infty)$  上单调减少, 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{-x} - a) = -a < 0$ , 由此可知  $F(x)$  在  $(1, +\infty)$  内有且仅有唯一的零点. 因此  $F(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内有且仅有两个零点.

综上所述, 当  $F(1) = e^{-1} - a < 0$ , 即  $e^{-1} < a$  时, 方程没有实根;

当  $F(1) = e^{-1} - a = 0$ , 即  $e^{-1} = a$  时, 方程有唯一实根;

当  $F(1) = e^{-1} - a > 0$ , 即  $e^{-1} > a$  时, 方程有两个实根.

**例 3.48** 讨论方程  $\ln x = ax$  (其中  $a > 0$ ) 有几个实根?

**解** 设  $f(x) = \ln x - ax, x \in (0, +\infty)$ , 则  $f'(x) = \frac{1}{x} - a$ , 故  $x = \frac{1}{a}$  为  $f(x)$  的驻点.

当  $x < \frac{1}{a}$  时,  $f'(x) > 0$ ; 当  $x > \frac{1}{a}$  时,  $f'(x) < 0$ . 所以  $f\left(\frac{1}{a}\right)$  为最大值.

当  $f\left(\frac{1}{a}\right) > 0$ , 即  $-\ln a - 1 > 0$ , 亦即  $0 < a < \frac{1}{e}$  时, 由于  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ ,

所以当  $0 < a < \frac{1}{e}$  时, 方程有两个根.



当  $f\left(\frac{1}{a}\right)=0$ , 即  $a=\frac{1}{e}$  时, 方程有一个根.

当  $f\left(\frac{1}{a}\right)<0$ , 即  $a>\frac{1}{e}$  时, 方程无根.

**例 3.49** 对  $k$  的不同取值, 分别讨论方程  $x^3-3kx^2+1=0$  在区间  $(0, +\infty)$  内根的个数.

**解** 设  $f(x)=x^3-3kx^2+1, 0\leq x<+\infty$ , 则  $f'(x)=3x(x-2k)$ .

(1) 当  $k\leq 0$  时,  $f'(x)>0$ , 即  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上单调增加. 又  $f(0)=1$ , 故原方程在区间  $(0, +\infty)$  内无根;

(2) 当  $k>0$  时: 若  $0<x<2k$ , 则  $f'(x)<0$ ,  $f(x)$  单调减少; 若  $2k<x$ , 则  $f'(x)>0$ ,  $f(x)$  单调增加. 所以  $x=2k$  是  $f(x)$  的极小值点, 极小值  $f(2k)=1-4k^3$ , 于是:

当  $1-4k^3>0$ , 即  $0<k<\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$  时, 原方程在区间  $(0, +\infty)$  内无根;

当  $1-4k^3=0$ , 即  $k=\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$  时, 原方程在区间  $(0, +\infty)$  内有唯一的根;

当  $1-4k^3<0$ , 即  $k>\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$  时, 原方程在区间  $(0, +\infty)$  内有两个根.

**例 3.50** 设方程  $x^4+ax+b=0$ .

(1) 当常数  $a, b$  满足何种关系时, 方程有唯一实根?

(2) 当常数  $a, b$  满足何种关系时, 方程无实根.

**解** 设  $y=x^4+ax+b, -\infty<x<+\infty$ , 求导得  $y'=4x^3+a$ .

令  $y'=0$  得唯一驻点  $x=\sqrt[3]{-\frac{a}{4}}$ . 又  $y''=12x^2\geq 0$ , 故当  $x=\sqrt[3]{-\frac{a}{4}}$  时,  $y$  有最小值, 且最

小值为  $y|_{x=\sqrt[3]{-\frac{a}{4}}}=\left(-\frac{a}{4}\right)^{\frac{4}{3}}+a\left(-\frac{a}{4}\right)^{\frac{1}{3}}+b$ .

又当  $x\rightarrow-\infty$  时,  $y\rightarrow+\infty$ ;  $x\rightarrow+\infty$  时,  $y\rightarrow+\infty$ , 因此:

(1) 当且仅当  $\left(-\frac{a}{4}\right)^{\frac{4}{3}}+a\left(-\frac{a}{4}\right)^{\frac{1}{3}}+b=0$  时, 方程有唯一实根;

(2) 当  $\left(-\frac{a}{4}\right)^{\frac{4}{3}}+a\left(-\frac{a}{4}\right)^{\frac{1}{3}}+b>0$  时, 方程无实根.

### 题型 3-18 方程 $f(x)=0$ 的根的唯一性的研究

**【解题思路】** (1) 利用零值定理(或罗尔定理)证明  $f(x)=0$  至少存在一个根; (2) 利用函数的单调性证明  $f(x)=0$  最多只有一个根; 或用反证法证明, 这时主要利用罗尔定理或拉格朗日中值定理.

**例 3.51** 设函数  $f(x)$  在闭区间上可微, 对于  $[0, 1]$  上的每一个  $x$ , 函数值  $f(x)$  在开区间  $(0, 1)$  内, 且  $f'(x)\neq 1$ , 证明, 在  $(0, 1)$  内有且仅有一个  $x$ , 使  $f(x)=x$ .

**证明** 令  $F(x)=f(x)-x$ , 则  $F(x)$  在  $[0, 1]$  上连续.

由题设知  $0<f(x)<1$ , 所以  $F(0)=f(0)-0>0, F(1)=f(1)-1<0$ , 故由零点定理知, 在  $(0, 1)$  内至少存在一点  $x$ , 使  $F(x)=f(x)-x=0$ , 即  $f(x)=x$ .

再设有两个  $x_1, x_2\in(0, 1), x_1\neq x_2$ , 使  $F(x_1)=0, F(x_2)=0$ . 根据罗尔定理,  $\exists \xi\in(0, 1)$  使  $F'(\xi)=f'(\xi)-1=0$ . 这与  $f'(x)\neq 1$  矛盾. 故方程有唯一根.

## 6) 洛必达法则

## (1) 学习洛必达法则应注意的问题

① 洛必达法则仅仅用于  $\frac{0}{0}$  型和  $\frac{\infty}{\infty}$  型未定式;

② 如果  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  不存在(不包括  $\infty$ ), 不能断言  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$  不存在, 只能说明洛必达法则在此失效, 应采用其他方法求极限, 但不能说此未定式的极限不存在.

③  $0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0$  也叫未定型, 必须转化为  $\frac{0}{0}$  型或  $\frac{\infty}{\infty}$  型之后, 再用洛必达法则求极限; 思路为

$0 \cdot \infty$  型转化为  $\frac{1}{\infty} \cdot \infty$  或  $0 \cdot \frac{1}{0}$  型;

$\infty - \infty$  可通分转化为  $\frac{0}{0}$  型或  $\frac{\infty}{\infty}$  型;

$0^0$  型转化为  $e^{\ln 0^0} = e^{0 \cdot \ln 0}$ , 其中指数是  $0 \cdot \infty$  型;

$1^\infty$  型转化为  $e^{\ln 1^\infty} = e^{\infty \cdot \ln 1}$ , 其中指数是  $\infty \cdot 0$ ;

$\infty^0$  型转化为  $e^{\ln \infty^0} = e^{0 \ln \infty}$ , 其中指数是  $0 \cdot \infty$  型.

④ 洛必达法则求极限与其他方法求极限在同一题中可交替使用;

⑤ 有时要连续用几次洛必达法则, 每一次都要验证是否是  $\frac{0}{0}$  型或  $\frac{\infty}{\infty}$  型.

⑥ 应注意洛必达法则不是求  $0/0$  型或与  $\infty/\infty$  型未定式的唯一方法. 读者在计算时应该结合使用等价无穷小的替换、带有佩亚诺余项的泰勒公式等方法, 以使计算简便、准确.

(2) 如果数列极限也属于未定式的极限问题, 需先将其转换为函数极限, 然后使用洛必达法则, 从而求出数列极限.

## 题型 3-19 利用洛必达法则求极限

例 3.52 求下列各式的极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{x^3};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{\pi}{2} - \arctan x \right);$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \cot x \right);$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2}{x^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad (1) \text{ 解法一} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2} \quad (\text{洛必达法则}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{3x^2 \sqrt{1-x^2}} \quad (\text{通分}) \\ &= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2 \sqrt{1-x^2}} \quad (\text{分子等价无穷小代换}) \\ &= -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

注 对  $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$  型未定式, 只要满足洛必达法则的条件, 可直接运用法则来求.



$$\text{解法二} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{6}x^3}{x^3} = -\frac{1}{6} \quad \left(x - \arcsin x \sim -\frac{1}{6}x^3\right).$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{\pi}{2} - \arctan x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1.$$

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \cot x \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^2} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos x + x \sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{2x} = 0.$$

注 对  $0 \cdot \infty, \infty - \infty$  型未定式, 先化为  $\frac{0}{0}$  或  $\frac{\infty}{\infty}$  型, 再利用洛必达法则来求.

(4) 对原式应用洛必达法则

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{4x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x) - (1+x)}{4x(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x})} = -\frac{1}{4}.$$

例 3.53 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{x^2} \right)$ .

【错解】  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x \cos^2 x}{x^2 \sin^2 x} = 0.$

【分析】 先通分化为“ $\frac{0}{0}$ ”型极限, 再利用等价无穷小与洛必达法则求解即可, 而不是想

当然的猜一个结果. 本题属于求未定式极限的基本题型, 对于“ $\frac{0}{0}$ ”型极限, 应充分利用等价无穷小替换来简化计算.

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x \cos^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \frac{1}{4} \sin^2 2x}{x^4} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \frac{1}{2} \sin 4x}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{6x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} (4x)^2}{6x^2} = \frac{4}{3}.$$

例 3.54 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$ .

解 所求极限属于  $\frac{0}{0}$  的未定式. 但分子分母分别求导数后, 将化为  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x}$ .

此式振荡无极限, 故洛必达法则失效, 不能使用. 但原极限是存在的, 可用下法求得:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x}{\sin x} \cdot x \sin \frac{1}{x} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x}} = \frac{0}{1} = 0.$$

例 3.55 已知函数  $f(x) = \frac{1+x}{\sin x} - \frac{1}{x}$ ,  $a = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

(1) 求  $a$  的值; (2) 若  $x \rightarrow 0$  时,  $f(x) - a$  是  $x^k$  的同阶无穷小, 求  $k$ .

解 (1)  $a = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ .

(2) 当  $x \rightarrow 0$  时,  $f(x) - a = f(x) - 1 = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sin x}{x \sin x}$ .

而当  $x \rightarrow 0$  时,  $x - \sin x$  与  $\frac{1}{6}x^3$  等价, 故  $f(x) - a \sim \frac{1}{6}x$ , 即  $k=1$ .

例 3.56 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - e^{2-2\cos x}}{x^4}$ .

解  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - e^{2-2\cos x}}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2}(1 - e^{2-2\cos x - x^2})}{x^4}$  (提出非零因子)

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{2-2\cos x - x^2}}{x^4} \quad (\text{非零因子单独求出极限 } \lim_{x \rightarrow 0} e^{x^2} = 1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(2 - 2\cos x - x^2)}{x^4} \quad (\text{等价无穷小代换})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2\cos x - 2}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 2\sin x}{4x^3} \quad (\text{洛必达法则})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6}x^3}{2x^3} = \frac{1}{12}. \quad (\text{等价无穷小代换})$$

例 3.57 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\ln(1+x)}{x} \right)^{\frac{1}{x^2-1}}$ .

解 对  $1^\infty, 0^0, \infty^0$  型未定式, 通过取对数, 先化为  $0 \cdot \infty$  型, 再化为  $\frac{0}{0}$  或  $\frac{\infty}{\infty}$  型, 利用洛必达法则来求.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\ln(1+x)}{x} \right)^{\frac{1}{x^2-1}} &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln \ln(1+x) - \ln x}{x^2-1}} \quad (\text{利用指数函数的连续性极限号可以穿过函数符号}) \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \ln(1+x) - \ln x}{x^2-1}} \quad \left( \frac{0}{0} \text{ 型洛必达法则} \right) \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(1+x)\ln(1+x)} - \frac{1}{x}}{2x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (1+x)\ln(1+x)}{2x^2 \ln(1+x)}}. \end{aligned}$$

将非零极限因子适时地分离并计算出来  $\left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x} = 1 \right)$ , 并进行等价无穷小代换, 有

$$\begin{aligned} \text{上式} &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (1+x)\ln(1+x)}{2x^3}} \quad (\text{洛必达法则}) \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \ln(1+x) - 1}{6x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{6x^2}} = 0. \end{aligned}$$

## 7) 最值及其经济意义

### 题型 3-20 函数最值的求法

【解题思路】 (1) 求最大值最小值的步骤为: 首先求出定义域; 然后求出  $f'(x)$ , 求出可疑极值点; 最后比较可疑极值点的函数值与边界处的函数值. (可疑极值点为驻点和导数



不存在的点)

(2) 求具体问题最值的步骤

① 分析问题,明确求哪个量的最值.

② 写出函数关系式.确定函数关系常常要用几何、物理、化学、经济学等方面的知识,函数关系式列出后,依具体情况要写出定义域.

③ 由函数式求驻点,并判断是否为极值点.

④ 根据具体问题,判别该极值点是否为最值点.一般如果函数在 $[a, b]$ 连续,且只求得唯一的极值点,则这个极值点就是所求的最值点.

⑤ 最后写出最值.

注意不要将极大(极小)值与最大(最小)值混为一谈,要懂得它们的区别和联系.

**例 3.58** 求  $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$  在  $[1, 4]$  上的最大值与最小值.

**解** 令  $y' = 6x^2 - 12x - 18 = 6(x+1)(x-3) = 0$ , 得驻点  $x = -1, x = 3$ , 且  $y(-1) = 17$ ,  $y(3) = -47$ , 而  $y(1) = -15, y(4) = -33$ , 故最大值为  $y(-1) = 17$ , 最小值为  $y(3) = -47$ .

**例 3.59** 设函数  $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$ .

(1) 求  $f(x)$  的最小值;

(2) 设数列  $\{x_n\}$  满足  $\ln x_n + \frac{1}{x_{n+1}} < 1$ , 证明极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在, 并求此极限.

**解** (1)  $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$ , 令  $f'(x) = 0$ , 得唯一驻点  $x = 1$ .

当  $x \in (0, 1)$  时,  $f'(x) < 0$ , 函数单调递减; 当  $x \in (1, +\infty)$  时,  $f'(x) > 0$ , 函数单调递增. 所以函数在  $x = 1$  处取得最小值  $f(1) = 1$ .

(2) 由于  $\ln x_n + \frac{1}{x_{n+1}} < 1$ , 但  $\ln x_n + \frac{1}{x_n} \geq 1$ , 所以  $\frac{1}{x_{n+1}} < \frac{1}{x_n}$ , 故数列  $\{x_n\}$  单调递增. 又由于  $\ln x_n \leq \ln x_n + \frac{1}{x_{n+1}} < 1$ , 得到  $0 < x_n < e$ , 故数列  $\{x_n\}$  有界. 由单调有界收敛定理可知极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在.

令  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \ln x_n + \frac{1}{x_{n+1}} \right) = \ln a + \frac{1}{a} \leq 1$ , 由(1)的结论可知  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a = 1$ .

**例 3.60** 1992 年巴塞罗那夏季奥运会开幕式上的奥运火炬, 是由射箭铜牌获得者安东尼奥·雷波罗用一枝燃烧的箭点燃的(参见图 3-1(a)), 奥运火炬位于高约 21m 的火炬台顶端的圆盘中, 假定雷波罗在地面以上 2m 距火炬台顶端圆盘约 70m 处的位置射出火箭, 若火箭恰好在达到其最大飞行高度 1s 后落入火炬圆盘中, 试确定火箭的发射角  $\alpha$  和初速度  $v_0$ .

(假定火箭射出后在空中的运动过程中受到的阻力为零, 且  $g = 10 \text{ m/s}^2$ ,  $\arctan \frac{22}{20.9} \approx 46.5^\circ$ ,  $\sin 46.5^\circ \approx 0.725$ .)

**解** 建立如图 3-1(b)所示坐标系, 设火箭被射向空中的初速度为  $v_0 \text{ m/s}$ , 即  $v_0 = (v_0 \cos \alpha, v_0 \sin \alpha)$ , 则火箭在空中运动  $t \text{ s}$  后的位移方程为

$$s(t) = (x(t), y(t)) = (v_0 \cos \alpha t, 2 + v_0 \sin \alpha t - 5t^2).$$

火箭在其速度的竖直分量为零时达到最高点, 故有

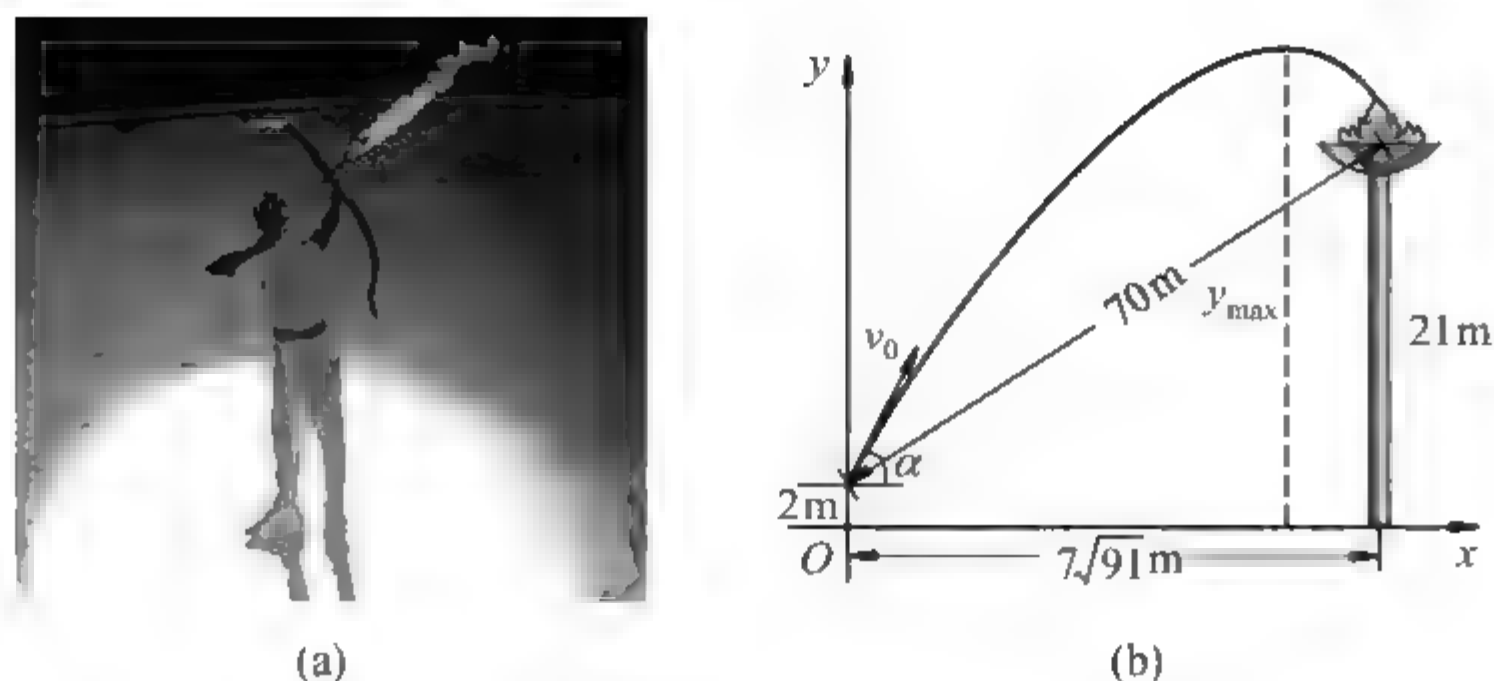


图 3.1

$$\frac{dy(t)}{dt} = (2 + v_0 \sin \alpha t - 5t^2)' = v_0 \sin \alpha - 10t = 0 \Rightarrow t = \frac{v_0}{10} \sin \alpha,$$

于是可得出当火箭达到最高点 1s 后的时刻其水平位移和竖直位移分别为

$$x(t) \Big|_{t=\frac{v_0 \sin \alpha}{10}+1} = v_0 \cos \alpha \left( \frac{v_0}{10} \sin \alpha + 1 \right) = 3.2 v_0 \cos \alpha = \sqrt{70^2 - 21^2},$$

$$y(t) \Big|_{t=\frac{v_0 \sin \alpha}{10}+1} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{20} - 3 = 21.$$

解得  $v_0 \sin \alpha \approx 22$ ,  $v_0 \cos \alpha \approx 20.9$ , 从而  $\tan \alpha = \frac{22}{20.9} \Rightarrow \alpha \approx 46.5^\circ$ .

又  $v_0 \sin \alpha \approx 22$ ,  $\alpha \approx 46.5^\circ \Rightarrow v_0 \approx 30.3 \text{ (m/s)}$ , 所以, 火箭的发射角  $\alpha$  和初速度  $v_0$  分别约为  $46.5^\circ$  和  $30.3 \text{ m/s}$ .

**例 3.61** 曲线  $y = \frac{1}{3}x^6 (x > 0)$  上哪一点处的法线在  $y$  轴上的截距最小?

**解** 设  $y = \frac{1}{3}x^6$  在  $(x, y)$  处的法线方程为  $Y - y = k(X - x)$ .

因为  $y' = 2x^5$ , 所以  $k = -\frac{1}{2x^5}$ , 法线方程为  $Y - y = -\frac{1}{2x^5}(X - x)$ , 整理后为

$$Y = y - \frac{X}{2x^5} + \frac{1}{2x^4} = -\frac{1}{2x^5}X + \frac{1}{2x^4} + \frac{1}{3}x^6,$$

法线在  $y$  轴上的截距为  $b = \frac{1}{2x^4} + \frac{1}{3}x^6$ .

求此函数的极值: 令  $b' = 0$ , 解得  $x_1 = 1, x_2 = -1$  (舍去);

$$b'' = \frac{10}{x^6} + 10x^4, \quad b''(1) = 20 > 0,$$

故  $b(1)$  为极小值. 由于驻点唯一, 知它即是最小值. 因此曲线在点  $\left(1, \frac{1}{3}\right)$  处的法线在  $y$  轴上截距最小.

**例 3.62** 设  $a$  为正常数, 使得  $x^2 \leq e^{ax}$  对一切正数  $x$  成立, 求常数  $a$  的最小值.

**解**  $x^2 \leq e^{ax} \Leftrightarrow 2 \ln x \leq ax \Leftrightarrow a \geq \frac{2 \ln x}{x}$ .

要求  $a$  的最小值, 只需求  $f(x) = \frac{2 \ln x}{x}$  的最大值.



令  $f'(x) = \frac{2(1 - \ln x)}{x^2} = 0$  得  $x = e$ .

由于当  $0 < x < e$  时,  $f'(x) > 0$ ; 当  $x > e$  时,  $f'(x) < 0$ . 所以  $f(e) = \frac{2}{e}$  为其最大值, 故  $a$  的最小值为  $\frac{2}{e}$ .

### 题型 3-21 导数在经济方面的应用

**【解题思路】** 利用边际(一阶导数)求最小成本, 最大利润. 利用弹性讨论需求弹性和收益弹性.

利润函数  $L(x) = R(x) - C(x)$ , 当有唯一驻点使  $L'(x_0) = 0, L''(x_0) < 0$ , 则在  $x_0$  处取得最大利润.

需求弹性为  $\frac{EQ}{EP} = \frac{P}{Q} \cdot \frac{dQ}{dP}$ .

由于需求函数  $Q = Q(P)$  一般是单调减少的, 因而需求对价格的弹性常为负值.

收益对价格的弹性为  $\frac{ER}{EP} = \frac{P}{Q} \cdot \frac{dR}{dP}$ . 因为  $R = PQ$ , 于是有

$$\frac{ER}{EP} = \frac{1}{Q} \cdot \frac{d(PQ)}{dP} = \frac{1}{Q} \left( Q + P \frac{dQ}{dP} \right) = 1 + \frac{EQ}{EP}.$$

**例 3.63** 一商家销售某种商品的价格满足关系  $P = 7 - 0.2x$  (单位: 万元/t), 其中  $x$  为销售量(单位: t), 商品的成本函数是  $C = 3x + 1$  (万元).

(1) 若每销售 1t 商品, 政府要征税  $t$  万元, 求该商家获最大利润时商品的销售量;

(2)  $t$  为何值时, 政府的税收总额最大?

**解** (1) 该商家销售商品的总收益函数  $R(x) = Px = 7x - 0.2x^2$ . 政府征收的总税额为  $T(x) = tx$ , 则商家的总利润函数

$$L(x) = R(x) - C(x) - T(x) = -0.2x^2 + (4 - t)x - 1.$$

$L'(x) = -0.4x + 4 - t$ , 可求得唯一驻点  $x = \frac{5}{2}(4 - t)$ .

$L''(x) = -0.4 < 0$ , 从而  $L(x)$  在该驻点  $x = \frac{5}{2}(4 - t)$  取得最大值, 即  $x = \frac{5}{2}(4 - t)$  是使商家获得最大利润的销售量.

(2) 政府税收总额  $T = tx = \frac{5}{2}t(4 - t)$ .

令  $T' = 10 - 5t = 0$ , 可得唯一驻点  $t = 2$ . 又因  $T'' < 0$ , 故当  $t = 2$  时政府税收总额最大.

**例 3.64** 设某产品的需求函数  $Q = Q(P)$  是单调减少的, 收益函数  $R = PQ$ , 当价格为  $P_0$  且对应的需求量为  $Q_0$  时, 边际收益  $R'(Q_0) = 2$ , 而  $R'(P_0) = -150$ , 需求对价格的弹性  $EP$  满足  $|EP| = \frac{3}{2}$ , 求  $P_0, Q_0$ .

**【分析】** 为了解决本题, 必须建立  $R'(Q), R'(P)$  与  $EP$  之间的关系.

因为  $R = PQ = PQ(P)$ , 于是有

$$R'(P) = Q(P) + P \frac{dQ}{dP} = Q \left( 1 + \frac{P}{Q} \frac{dQ}{dP} \right) = Q(1 + EP).$$

设  $P = P(Q)$  是需求函数  $Q = Q(P)$  的反函数, 则  $R = PQ = QP(Q)$ , 于是

$$R'(Q) = P(Q) + Q \frac{dP}{dQ} = P \left( 1 + \frac{Q}{P} \frac{dP}{dQ} \right) = P \left( 1 + \frac{1}{\frac{P}{Q} \cdot \frac{dQ}{dP}} \right) = P \left( 1 + \frac{1}{EP} \right).$$

解 因需求函数  $Q = Q(P)$  是单调减少的, 故需求函数的弹性  $EP < 0$ , 且反函数  $P = P(Q)$  存在, 由题设  $Q_0 = Q(P_0)$ ,  $P_0 = P(Q_0)$ , 且  $EP|_{P=P_0} = -\frac{3}{2}$ , 把它们代入分析中得到关系式中, 于是有  $R'(Q_0) = P_0 \left( 1 - \frac{2}{3} \right) = 2$ , 故  $P_0 = 6$ .

$$R'(P_0) = Q_0 \left( 1 - \frac{3}{2} \right) = -150, \text{ 故 } Q_0 = 300.$$

例 3.65 设平均收益函数和总成本函数分别为

$$\bar{R} = a - bQ, C = \frac{1}{3}Q^3 - 7Q^2 + 100Q + 50,$$

其中常数  $a > 0, b > 0$  待定, 已知当边际收益  $MR = 67$ , 且需求价格弹性  $EP = -\frac{89}{22}$  时总利润最大, 求总利润最大时的产量, 并确定  $a, b$  的值.

【分析】 平均收益  $\bar{R} = \frac{R}{Q}$ , 则  $R = RQ = aQ - bQ^2$ .

通常平均收益即为商品的价格, 即  $P = a - bQ$ , 则  $Q = \frac{1}{b}(a - P)$ .

进而可求得需求对价格的弹性  $EP = \frac{P}{Q} \frac{dQ}{dP} = \frac{1}{b} \cdot \frac{a - bQ}{Q} = 1 - \frac{a}{bQ}$ .

解 总利润函数

$$L(Q) = R - C = Q\bar{R} - C = -\frac{1}{3}Q^3 + (7 - b)Q^2 + (a - 100)Q - 50.$$

从而使利润最大的产量  $Q$  及相应的  $a, b$  应满足  $L'(Q) = 0, MR = 67$  以及  $EP = -\frac{89}{22}$ , 即

$$\begin{cases} -Q^2 + 2(7 - b)Q + a - 100 = 0, \\ a - 2bQ = 67, \\ 1 - \frac{a}{bQ} = -\frac{89}{22}. \end{cases}$$

解得  $\begin{cases} a = 111, \\ b = \frac{22}{3}, \\ Q = 3 \end{cases}$ , 或  $\begin{cases} a = 111, \\ b = 2, \\ Q = 11. \end{cases}$  将第一组解中的  $a, b$  代入总利润函数, 得

$$L(Q) = -\frac{1}{3}Q^3 - \frac{1}{3}Q^2 + 11Q - 50.$$

虽然  $L'(3) = 0, L''(3) < 0$ , 即  $L(3)$  为  $L(Q)$  的最大值, 但  $L(3) < 0$ , 不合实际, 故舍去.

将第二组解中的  $a, b$  代入总利润函数, 得  $L(Q) = -\frac{1}{3}Q^3 + 5Q^2 + 11Q - 50$ , 故有  $L'(11) = 0, L''(11) < 0$ , 即  $L(11)$  为  $L(Q)$  的最大值. 又因  $L(11) > 0$ , 故  $a = 111, b = 2$  是所求常数的值, 使利润最大的产量为  $Q = 11$ .



**例 3.66** 设某商品的需求函数为  $Q=100-5P$ , 其中价格  $P \in (0, 20)$ ,  $Q$  为需求量.

(1) 求需求量对价格的弹性  $E_d (E_d > 0)$ ;

(2) 推导  $\frac{dR}{dP} = Q(1 - E_d)$  (其中  $R$  为收益), 并用弹性  $E_d$  说明价格在何范围内变化时, 降低价格反而使收益增加.

**【分析】** 由于  $E_d > 0$ , 所以  $E_d = \left| \frac{P}{Q} \frac{dQ}{dP} \right|$ ; 由  $R = PQ$  及  $E_d = \left| \frac{P}{Q} \frac{dQ}{dP} \right|$  可推导

$$\frac{dR}{dP} = Q(1 - E_d).$$

**解** (1)  $E_d = \left| \frac{P}{Q} \frac{dQ}{dP} \right| = \frac{P}{20-P}$ .

(2) 由  $R = PQ$ , 得  $\frac{dR}{dP} = Q + P \frac{dQ}{dP} = Q \left( 1 + \frac{P}{Q} \frac{dQ}{dP} \right) = Q(1 - E_d)$ .

又由  $E_d = \frac{P}{20-P} = 1$ , 得  $P = 10$ .

当  $10 < P < 20$  时,  $E_d > 1$ , 于是  $\frac{dR}{dP} < 0$ , 故当  $10 < P < 20$  时, 降低价格反而使收益增加.

**注** 当  $E_d > 0$  时, 需求量对价格的弹性公式为  $E_d = \left| \frac{P}{Q} \frac{dQ}{dP} \right| = -\frac{P}{Q} \frac{dQ}{dP}$ .

利用需求弹性分析收益的变化情况有以下四个常用的公式:

$$dR = (1 - E_d)QdP, \quad \frac{dR}{dP} = (1 - E_d)Q, \quad \frac{dR}{dQ} = \left( 1 - \frac{1}{E_d} \right)P,$$

$$\frac{ER}{EP} = 1 - E_d \text{ (收益对价格的弹性)}.$$

**例 3.67** 设生产某产品的固定成本为 6000 元, 可变成本为 20 元/件, 价格函数为  $P = 60 - \frac{Q}{1000}$  ( $P$  是单价, 单位: 元;  $Q$  是销量, 单位: 件), 已知产销平衡, 求:

(1) 该产品的边际利润.

(2) 当  $P=50$  时的边际利润, 并解释其经济意义.

(3) 使得利润最大的定价  $P$ .

**解** (1) 设利润为  $L(Q)$ , 则  $L(Q) = R - C = PQ - (6000 + 20Q) = 40Q - \frac{Q^2}{1000} - 6000$ , 边际利润为  $L'(Q) = 40 - \frac{Q}{500}$ .

(2) 当  $P=50$  时,  $Q=10000$ , 边际利润为 20.

经济意义为: 当  $P=50$  时, 销量每增加一个, 利润增加 20.

(3) 令  $L'(Q) = 40 - \frac{Q}{500} = 0$ , 得  $Q=20000$ ,  $P = 60 - \frac{20000}{1000} = 40$ , 而  $L''(Q) = -\frac{1}{500} < 0$ ,

故当  $P=40$  时, 利润达到最大.

**例 3.68** 为了实现利润的最大化, 厂商需要对某商品确定其定价模型, 设  $Q$  为该商品的需求量,  $P$  为价格,  $C'(Q)$  为边际成本,  $\eta$  为需求弹性 ( $\eta > 0$ ).

(1) 证明定价模型为  $P = \frac{C'(Q)}{1 - \frac{1}{\eta}}$ ;

(2) 若该商品的成本函数为  $C(Q) = 1600 + Q^2$ , 需求函数为  $Q = 40 - P$ , 试由(1)中的定价模型确定此商品的价格.

解 (1) 由于利润函数  $L(Q) = R(Q) - C(Q) = PQ - C(Q)$ , 两边对  $Q$  求导, 得  $\frac{dL}{dQ} = P + Q \frac{dP}{dQ} - C'(Q) = P + Q \frac{dP}{dQ} - C'(Q)$ . 当且仅当  $\frac{dL}{dQ} = 0$  时, 利润  $L(Q)$  最大. 又由于  $\eta = -\frac{P}{Q} \cdot \frac{dQ}{dP}$ , 所以  $\frac{dP}{dQ} = -\frac{1}{\eta} \cdot \frac{P}{Q}$ , 故当  $P = \frac{C'(Q)}{1 - \frac{1}{\eta}}$  时, 利润最大.

(2) 由于  $C'(Q) = 2Q = 2(40 - P)$ , 则  $\eta = -\frac{P}{Q} \cdot \frac{dQ}{dP} = \frac{P}{40 - P}$ . 代入(1)中的定价模型, 得  $P = \frac{2(40 - P)}{1 - \frac{40 - P}{P}}$ , 从而解得  $P = 30$ .

### 3.4 课后习题解答

#### 习题 3.1

1. 验证函数  $f(x) = \ln \sin x$  在  $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$  上满足罗尔定理的条件, 并求出相应的  $\xi$ , 使  $f'(\xi) = 0$ .

解 一方面, 因为  $f(x) = \ln \sin x$  在区间  $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$  上连续, 在  $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$  内可导, 且  $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = y\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \ln \frac{1}{2}$ , 所以  $f(x) = \ln \sin x$  在区间  $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$  上满足罗尔定理的条件, 存在  $\xi \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$ , 使得  $f'(\xi) = 0$ . 另一方面,  $f'(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$ , 令  $f'(x) = 0$ , 得  $x = \frac{\pi}{2}$ , 则罗尔定理中的  $\xi = \frac{\pi}{2}$ ,  $f'(\xi) = 0$ .

2. 下列函数在指定区间上是否满足罗尔定理的三个条件? 有没有满足定理结论中的  $\xi$ ?

(1)  $f(x) = e^{x^2} - 1, [-1, 1]$ ; (2)  $f(x) = |x - 1|, [0, 2]$ ; (3)  $f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 < x \leq \pi, \\ 1, & x = 0, \end{cases} [0, \pi]$ .

解 (1) 因为  $f(x)$  在  $[-1, 1]$  上连续, 在  $(-1, 1)$  内可导, 且  $f(-1) = f(1) = e - 1$ , 所以满足罗尔定理中的三个条件. 由  $f'(x) = 2xe^{x^2}$ , 若令  $f'(\xi) = 0$ , 则有  $\xi = 0$ .

(2) 因为函数在  $x = 1$  点的导数不存在, 故不满足罗尔定理的条件.

(3) 因为函数在  $x = 0$  点不连续, 故不满足罗尔定理的条件. 但存在  $\xi = \frac{\pi}{2} \in (0, \pi)$ , 使得  $f'(\xi) = \cos \frac{\pi}{2} = 0$ .

3. 若方程  $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x = 0$  有一个正根  $x_0$ , 证明方程  $a_0 n x^{n-1} + a_1 (n-1) x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} = 0$  必有一个小于  $x_0$  的正根.

证明 作辅助函数  $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x$ . 显然  $f(x)$  在  $[0, x_0]$  上连续, 在  $(0, x_0)$  内可导, 且  $f(0) = f(x_0) = 0$ . 故由罗尔定理知, 至少存在一点  $\xi \in (0, x_0)$  使  $f'(\xi) = 0$ , 即  $f'(\xi) = a_0 n \xi^{n-1} + a_1 (n-1) \xi^{n-2} + \cdots + a_{n-1} = 0$ , 从而题设方程在  $(0, x_0)$  内至少有一个实根.

4. 已知函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 且  $f(a) = f(b) = 0$ , 试证: 在  $(a, b)$  内至少存在一点  $\xi$ , 使得  $f(\xi) + f'(\xi) = 0, \xi \in (a, b)$ .

证明 构造函数  $F(x) = e^x f(x)$ , 显然  $F(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 且  $F(a) = F(b) = 0$ , 根据罗尔定理: 在  $(a, b)$  内至少存在一点  $\xi$ , 使得  $F'(\xi) = 0$ , 进而得到  $f(\xi) + f'(\xi) = 0, \xi \in (a, b)$ .

5. 设  $f(a) = f(c) = f(b)$ , 且  $a < c < b$ ,  $f''(x)$  在  $[a, b]$  上存在, 证明: 在  $(a, b)$  内至少存在一点  $\xi$ , 使  $f''(\xi) = 0$ .



证明 由  $f(a)=f(c)$ , 根据罗尔定理, 存在  $\xi_1 \in (a, c)$ , 使得  $f'(\xi_1)=0$ ;

由  $f(b)=f(c)$ , 根据罗尔定理, 存在  $\xi_2 \in (c, b)$ , 使得  $f'(\xi_2)=0$ .

由  $f''(x)$  在  $[a, b]$  上存在, 得到  $f'(x)$  在  $[a, b]$  上连续且可导, 又  $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$ , 根据罗尔定理知: 存在  $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ , 使得  $f''(\xi)=0$ .

6. 验证拉格朗日中值定理对函数  $f(x)=x^3+2x$  在区间  $[0, 1]$  上的正确性, 并求出满足条件的  $\xi$  值.

解 一方面,  $f(x)=x^3+2x$  在  $[0, 1]$  上连续, 在  $(0, 1)$  内可导, 满足拉格朗日中值定理的条件.

另一方面,  $f'(x)=3x^2+2, \frac{f(1)-f(0)}{1-0}=3$ .

当  $\xi=\frac{1}{\sqrt{3}}$  时  $f'(\xi)=3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+2=3$ , 即当  $\xi=\frac{1}{\sqrt{3}}$  时, 有  $\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=f'(\xi)$ . 拉格朗日定理的结论

成立.

7. 试证明对函数  $y=px^2+qx+r$ , 应用拉格朗日中值定理时所求得的点  $\xi$  总位于区间的正中间.

证明 设  $y=f(x)=px^2+qx+r$ , 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 故由拉格朗日中值定理得存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{p(b^2-a^2)+q(b-a)}{b-a} = p(b+a)+q.$$

而  $f'(x)=2px+q$ , 故得  $2p\xi+q=p(b+a)+q$ , 从而  $\xi=\frac{b+a}{2}$ , 即  $\xi$  为  $[a, b]$  中点.

8. 已知函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 且  $f(a)=f(b)$ , 试证: 在  $(a, b)$  内至少存在一点  $\xi$ , 使得  $f(\xi)+\xi f'(\xi)=f(a), \xi \in (a, b)$ .

【分析】 本题既可以用罗尔定理证明, 又可以用拉格朗日定理证明.

用罗尔定理证明用原函数构造法构造辅助函数. 待证等式变形为  $f(\xi)+\xi f'(\xi)-f(a)=0$ .

将  $\xi$  变为  $x$  得  $f(x)+xf'(x)-f(a)=0$ . 故设

$$F'(x) = f(x) + xf'(x) - f(a), \quad \text{则 } F(x) = xf(x) - xf(a).$$

证明 证法一 令  $F(x)=xf(x)-xf(a)$ , 则  $F(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 且

$$F(a) = af(a) - af(a) = 0, \quad F(b) = bf(b) - bf(a) = 0.$$

由罗尔定理, 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $F'(\xi)=0$ , 即有

$$f(\xi) + \xi f'(\xi) - f(a) = 0, \quad \text{即 } f(\xi) + \xi f'(\xi) = f(a).$$

证法二 利用拉格朗日中值定理证明. 令  $F(x)=xf(x)$ , 则  $F(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 由拉格朗日定理, 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a} = F'(\xi), \quad \text{即 } f(\xi) + \xi f'(\xi) = \frac{bf(b)-af(a)}{b-a} = \frac{f(a)(b-a)}{b-a} = f(a).$$

9. 证明下列不等式:

(1)  $a>b>0, n>1$ , 证明  $nb^{n-1}(a-b) < a^n - b^n < na^{n-1}(a-b)$ ;

(2)  $a>b>0$ , 证明  $\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$ ;

(3)  $|\arctan b - \arctan a| \leq |b-a|$ .

证明 (1) 设  $f(x)=x^n$ , 对于  $a>b>0, n>1$ ,  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 则存在  $\xi \in (a, b)$  使得  $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$ , 即  $\frac{b^n-a^n}{b-a} = n\xi^{n-1}$ , 也即

$$na^{n-1}(b-a) < b^n - a^n = n\xi^{n-1}(b-a) < nb^{n-1}(b-a),$$

$$nb^{n-1}(b-a) < a^n - b^n = n\xi^{n-1}(b-a) < na^{n-1}(a-b).$$

(2) 设  $f(x)=\ln x$ ,  $f(x)$  在  $[b, a]$  上连续, 在  $(b, a)$  内可导, 则存在  $\xi \in (a, b)$  使得  $\frac{f(a)-f(b)}{a-b} = f'(\xi)$ , 即

$\frac{\ln a - \ln b}{a - b} = \frac{1}{\xi}$ , 也即  $\ln \frac{a}{b} = \frac{a - b}{\xi}$ , 而  $\frac{a - b}{a} < \frac{a - b}{\xi} < \frac{a - b}{b}$ , 从而  $\frac{a - b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a - b}{b}$ .

(3) 设  $f(x) = \arctan x$ , 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 则存在  $\xi \in (a, b)$  使得  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$ , 即  $\frac{\arctan b - \arctan a}{b - a} = \frac{1}{1 + \xi^2}$ , 从而  $\arctan b - \arctan a = \frac{1}{1 + \xi^2}(b - a)$ , 而  $\left| \frac{1}{1 + \xi^2}(b - a) \right| \leq |b - a|$ , 所以  $|\arctan b - \arctan a| \leq |b - a|$ .

10. 设函数  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 在  $(0, 1)$  内可导. 试证明至少存在一点  $\xi \in (0, 1)$  使  $f'(\xi) = 2\xi[f(1) - f(0)]$ .

**证明** 待证结论恒等变形为  $\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{f'(\xi)}{2\xi} = \frac{f'(x)}{(x^2)'} \Big|_{x=\xi}$ , 故设  $g(x) = x^2$ , 对  $f(x), g(x)$  在  $[0, 1]$  上应用柯西中值定理, 存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使得  $\frac{f(1) - f(0)}{g(1) - g(0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ , 从而

$$\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{f'(\xi)}{2\xi}, \quad \text{即 } f'(\xi) = 2\xi[f(1) - f(0)].$$

**注** 也可令  $F(x) = f(x) - x^2[f(1) - f(0)]$ , 利用罗尔定理证明.

### 提高题

1. 设函数  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 在  $(0, 1)$  内可导, 且  $f(0) = 0, f(1) = 1$ . 证明:

- (1) 存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使得  $f(\xi) = 1 - \xi$ ;
- (2) 存在两个不同的点  $\eta, \tau \in (0, 1)$ , 使得  $f'(\eta)f'(\tau) = 1$ .

**证明** (1) 令  $F(x) = f(x) + x - 1$ , 则  $F(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 且

$$F(0) = f(0) + 0 - 1 = -1, \quad F(1) = f(1) + 1 - 1 = 1, \quad \text{故 } F(0) \cdot F(1) < 0.$$

由零点存在定理存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使得  $F(\xi) = 0$ , 即  $f(\xi) = 1 - \xi$ .

(2)  $f(x)$  在  $[0, \xi]$  上连续, 在  $(0, \xi)$  内可导, 由拉格朗日中值定理得存在  $\eta \in (0, \xi)$ , 使得  $f'(\eta) = \frac{f(\xi) - f(0)}{\xi - 0} = \frac{1 - \xi}{\xi}$ .

又  $f(x)$  在  $[\xi, 1]$  上连续, 在  $(\xi, 1)$  内可导, 由拉格朗日中值定理得存在  $\tau \in (\xi, 1)$ , 使得  $f'(\tau) = \frac{f(1) - f(\xi)}{1 - \xi} = \frac{\xi}{1 - \xi}$ .

综上得  $f'(\eta)f'(\tau) = 1$ .

2. 已知函数  $f(x), g(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 且  $f(a) = f(b) = 0$ , 试证: 在  $(a, b)$  内至少存在一点  $\xi$ , 使得

$$f'(\xi) + f(\xi)g'(\xi) = 0, \quad \xi \in (a, b).$$

**证明** 令  $F(x) = f(x)e^{g(x)}$ , 则  $F(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 且  $F(a) = F(b) = 0$ . 由罗尔定理, 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $F'(\xi) = 0$ , 即  $e^{g(\xi)}(f'(\xi) + f(\xi)g'(\xi)) = 0$ , 从而有  $f'(\xi) + f(\xi)g'(\xi) = 0$ .

3. 设函数  $f(x), g(x)$  在  $[a, b]$  上二阶可导且存在相等的最大值. 又  $f(a) = g(a), f(b) = g(b)$ . 证明: (1) 存在  $\eta \in (a, b)$ , 使得  $f(\eta) = g(\eta)$ ; (2) 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f''(\xi) = g''(\xi)$ .

**证明** (1) 函数  $f(x), g(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 故可设  $f(x)$  在  $\xi_1 \in [a, b]$  处取得最大值  $f(\xi_1) = M, g(x)$  在  $\xi_2 \in [a, b]$  处取得最大值  $g(\xi_2) = M$ .

若  $\xi_1 = \xi_2$ , 则取  $\eta = \xi_1 = \xi_2$ , 有  $f(\eta) = g(\eta)$ .

若  $\xi_1 < \xi_2$ , 令  $F(x) = f(x) - g(x)$ , 则  $F(x)$  在  $[\xi_1, \xi_2]$  上连续, 且

$$F(\xi_1) = f(\xi_1) - g(\xi_1) = M - g(\xi_1) > 0, \quad F(\xi_2) = f(\xi_2) - g(\xi_2) = f(\xi_2) - M < 0,$$

由介值定理, 存在  $\eta \in (\xi_1, \xi_2) \subset (a, b)$ , 使得  $F(\eta) = 0$ , 即  $f(\eta) = g(\eta)$ .

(2) 设  $F(x) = f(x) - g(x)$ , 则  $F(x)$  在  $[a, \eta]$  上连续, 在  $(a, \eta)$  内可导, 且  $F(a) = F(\eta) = 0$ . 由罗尔定理, 存在  $\eta_1 \in (a, \eta)$ , 使得  $F'(\eta_1) = 0$ ;



同理,  $F(x)$  在  $[\eta, b]$  上连续, 在  $(\eta, b)$  内可导, 且  $F(b) - F(\eta) = 0$ . 由罗尔定理, 存在  $\eta_2 \in (\eta, b)$ , 使得  $F'(\eta_2) = 0$ ;

$F(x)$  在  $[\eta, \eta_2]$  上连续, 在  $(\eta, \eta_2)$  内可导, 且  $F'(\eta) - F'(\eta_2) = 0$ . 由罗尔定理, 存在  $\xi \in (\eta, \eta_2)$ , 使得  $F''(\xi) = 0$ .

4. 设函数  $f(x)$  在区间  $[0, 1]$  上具有二阶导数, 且  $f(1) > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} < 0$ , 证明:

(1) 方程  $f(x) = 0$  在区间  $(0, 1)$  至少存在一个实根;

(2) 方程  $f(x)f''(x) + (f'(x))^2 = 0$  在区间  $(0, 1)$  内至少存在两个不同实根.

**证明** (1) 根据极限的局部保号性的结论, 由条件  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} < 0$  可知, 存在  $0 < \delta < 1$ , 及  $x_1 \in (0, \delta)$ , 使得  $f(x_1) < 0$ . 由于  $f(x)$  在  $[x_1, 1]$  上连续, 且  $f(x_1) \cdot f(1) < 0$ , 由零点定理, 存在  $\xi \in (x_1, 1) \subset (0, 1)$ , 使得  $f(\xi) = 0$ , 也就是方程  $f(x) = 0$  在区间  $(0, 1)$  至少存在一个实根.

(2) 由条件  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} < 0$  可知  $f(0) = 0$ , 由 (1) 可知  $f(\xi) = 0$ , 由罗尔定理, 存在  $\eta \in (0, \xi)$ , 使得  $f'(\eta) = 0$ .

设  $F(x) = f(x)f'(x)$ , 由条件可知  $F(x)$  在区间  $[0, 1]$  上可导, 且  $F(0) = 0, F(\xi) = 0, F(\eta) = 0$ , 分别在区间  $[0, \eta], [\eta, \xi]$  上对函数  $F(x)$  使用罗尔定理, 则存在  $\xi_1 \in (0, \eta) \subset (0, 1), \xi_2 \in (\eta, \xi) \subset (0, 1)$ , 使得  $\xi_1 \neq \xi_2$ ,  $F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = 0$ , 也就是方程  $f(x)f''(x) + (f'(x))^2 = 0$  在区间  $(0, 1)$  内至少存在两个不同实根.

5. 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 在  $(0, 1)$  内可导且  $f(0) = 0$ , 但当  $x \in (0, 1)$  时,  $f(x) > 0$ , 求证:  $\exists \xi \in (0, 1)$ , 使  $\frac{2016 \cdot f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$ .

**证明** 设  $F(x) = f^{2016}(x) \cdot f(1-x)$ , 则  $F(0) = F(1) = 0$ , 且  $F(x)$  在  $[0, 1]$  上满足罗尔定理的条件, 由罗尔定理,  $\exists \xi \in (0, 1)$ , 使  $F'(\xi) = 2016f^{2015}(\xi) \cdot f'(\xi) \cdot f(1-\xi) - f^{2016}(\xi) \cdot f'(1-\xi) = 0$ .

又因为  $x \in (0, 1)$  时,  $f(x) > 0$ , 所以

$$2016 \cdot f'(\xi) \cdot f(1-\xi) - f(\xi) \cdot f'(1-\xi) = 0, \text{ 即 } \frac{2016 \cdot f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}.$$

6. 设  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上可导, 并且满足  $f(0) \leq 0, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$ . 试证:

(1) 存在  $\xi_1 \in (-\infty, 0)$  和  $\xi_2 \in (0, +\infty)$  使得  $f(\xi_1) = 2014 = f(\xi_2)$ ;

(2) 存在  $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$  使得  $f(\xi) + f'(\xi) = 2014$ .

**证明** (1) 由  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$ , 取  $M = 2014$ , 则存在  $X > 0$ , 当  $|x| \geq X$  时,  $f(x) > 2014$ .

令  $F(x) = f(x) - 2014$ , 则  $F(x)$  在  $[-X, X]$  上连续, 且

$$F(-X) = f(-X) - 2014 > 0, \quad F(X) = f(X) - 2014 > 0, \quad F(0) = f(0) - 2014 < 0,$$

所以  $F(-X)F(0) < 0, F(X)F(0) < 0$ .

由零点定理知, 存在  $\xi_1 \in (-\infty, 0)$  和  $\xi_2 \in (0, +\infty)$  使得  $F(\xi_1) = 0 = F(\xi_2)$ , 即  $f(\xi_1) = 2014 = f(\xi_2)$ ;

(2) 构造辅助函数  $\Phi(x) = e^x(f(x) - 2014)$ ,  $x \in [\xi_1, \xi_2]$ , 则

$\Phi(x)$  在  $[\xi_1, \xi_2]$  上连续, 在  $(\xi_1, \xi_2)$  内可导, 且  $\Phi(\xi_1) = \Phi(\xi_2) = 0$ . 由罗尔定理, 存在  $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$  使得  $\Phi'(\xi) = 0$ , 即  $\Phi'(\xi) = e^\xi(f(\xi) + f'(\xi) - 2014) = 0$ , 由此可得  $f(\xi) + f'(\xi) = 2014$ .

7. 设函数  $f(x)$  在  $[-2, 2]$  上二阶可导, 且  $|f(x)| \leq 1, f(-2) = f(0) = f(2)$ . 又设  $[f(0)]^2 + [f'(0)]^2 = 4$ , 试证: 在  $(-2, 2)$  内至少存在一点  $\xi$ , 使  $f(\xi) + f''(\xi) = 0$ .

**证明** 设  $F(x) = [f(x)]^2 + [f'(x)]^2$ , 则  $F(x)$  在  $[-2, 2]$  上可导.

由于  $f(x)$  在  $[-2, 2]$  上可导及  $f(-2) = f(0) = f(2)$ , 所以存在  $a \in (-2, 0)$  及  $b \in (0, 2)$  使得  $f'(a) = f'(b) = 0$ . 由此可得  $F(a) = [f(a)]^2 + [f'(a)]^2 \leq 1, F(b) = [f(b)]^2 + [f'(b)]^2 \leq 1$ .

由题设  $F(0) = 4$  知,  $F(x)$  在  $[a, b]$  上的最大值  $M$  必在  $(a, b)$  内取到, 即存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $F(\xi) = M$ , 从而  $F'(\xi) = 0$ , 即  $f'(\xi)[f(\xi) + f'(\xi)] = 0$ . 由于  $F(\xi) = [f(\xi)]^2 + [f'(\xi)]^2 \geq F(0) = 4$ , 而  $f(\xi) \leq 1$ , 所以有

$f'(\xi) \neq 0$ , 由此可得  $f(\xi) + f'(\xi) = 0 (\xi \in (a, b) \subset (-2, 2))$ .

### 习题 3.2

1. 利用洛必达法则求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\tan 5x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x(e^x - 1)};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{(\pi - 2x)^2};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x};$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\operatorname{arccot} x};$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\tan 3x};$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\cot x};$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \ln x;$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1} - x);$$

$$(12) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^x}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right);$$

$$(13) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}};$$

$$(14) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2}{\pi} \arctan x \right)^x;$$

$$(15) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{3 - e^x}{2 + x} \right)^{\cot x};$$

$$(16) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}}.$$

解 (1)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\tan 5x} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{3 \cos 3x}{5 \sec^2 5x} = -\frac{3}{5};$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} \xrightarrow{\text{无穷小代换}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{1} = 2;$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{(\pi - 2x)^2} \xrightarrow{\frac{0}{0}} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{2(\pi - 2x) \cdot (-2)} \xrightarrow{\frac{0}{0}} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\csc^2 x}{8} = -\frac{1}{8};$$

$$(5) \text{当 } a \neq 0 \text{ 时, 原式} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}} = \frac{m}{n} a^{\frac{m-n}{n}};$$

$$\text{当 } a = 0 \text{ 时, 原式} = \begin{cases} 0, & m > n, \\ 1, & m = n, \\ \infty, & m < n; \end{cases}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x} \xrightarrow{\frac{0}{0}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2} = 2;$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\operatorname{arccot} x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\operatorname{arccot} x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{1+x^2}} = 1;$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\tan 3x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\sin 3x}{\cos 3x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\sin 3x} = -\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-3 \sin 3x}{-\sin x} = 3; \left( \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin 3x} = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\sin \frac{3\pi}{2}} = -1 \right)$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\cot x} \xrightarrow{\frac{-\infty}{\infty}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\csc^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{x} = 0;$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \cdot \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0;$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}} - 1 \right)$$



$$= \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{1}{3} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) = \frac{1}{3};$$

$$(12) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^x}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) \xrightarrow{\text{通分}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x(e^x - 1) - x}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{2x} - e^x - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4e^{2x} - e^x}{2} = \frac{3}{2};$$

$$(13) \text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(1+\sin x)}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}} = e;$$

$$(14) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2}{\pi} \arctan x \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln \frac{2}{\pi} \arctan x} \left( x \rightarrow +\infty, \ln \frac{2}{\pi} \arctan x \sim \frac{2}{\pi} \arctan x - 1 \right) \\ = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{2}{\pi} \arctan x - 1 \right)} \quad (\infty \cdot 0 \text{ 型化为 } \frac{0}{0} \text{ 型})$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{\pi} \arctan x - 1}{\frac{1}{x}}} \quad (\text{洛必达法则});$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^{-\frac{2}{\pi}}.$$

$$(15) \text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\csc x [\ln(3-e^x) - \ln(2+x)]} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(3-e^x) - \ln(2+x)}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-e^x}{3-e^x} - \frac{1}{2+x}}{1}} = e^{-\frac{1}{4}};$$

$$(16) \text{令 } x^2 = \frac{1}{t}, \text{ 则原式} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{t} \xrightarrow{\frac{0}{0}} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{1} = +\infty.$$

2. 设  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + mx + n}{x - 1} = 5$ , 求常数  $m, n$  的值.

解 因为  $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0$ , 而  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + mx + n}{x - 1} = 5$ , 所以  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + mx + n) = 1 + m + n = 0$ . 由洛必达法则得

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + mx + n}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + m}{1} = 2 + m = 5, \text{ 从而得 } m = 3, n = -4.$$

3. 验证极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x}$  存在, 但不能由洛必达法则得出.

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{\sin x}{x} \right) = 1.$$

而用洛必达法则, 有  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{\cos x}{1} \right)$  不存在. 这验证了  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  不存在, 但  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$  存在.

4. 设  $f(x)$  二阶连续可导, 求  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$ .

$$\text{解 原式} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x-h)}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(x+h) + f''(x-h)}{2} = f''(x).$$

5. 设  $f(x)$  具有二阶连续导数, 且  $f(0) = 0$ , 试证  $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & x \neq 0, \\ f'(0), & x = 0 \end{cases}$

可导, 且导函数连续.

证明 由已知  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \cdot \frac{f(0)}{0} = f'(0) = g(0)$ , 故  $g(x)$  连续, 且当  $x \neq 0$  时,

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}, \text{ 而}$$

$$g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)}{x} - f'(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - xf'(0)}{x^2} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{2} = \frac{1}{2} f''(0)$$

当  $x \neq 0$  时,  $g'(x)$  显然连续. 而

$$\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{1}{2} f''(0) = g'(0),$$

所以  $g'(x)$  在点  $x=0$  处连续, 从而  $g'(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内是连续函数.

6. 讨论函数  $f(x) = \begin{cases} \left[ \frac{1}{e}(1+x)^{\frac{1}{x}} \right]^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0, \\ e^{-\frac{1}{2}}, & x = 0 \end{cases}$  在  $x=0$  处的连续性.

$$\begin{aligned} \text{解 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{e}(1+x)^{\frac{1}{x}} \right]^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left[ \frac{1}{x} \ln(1+x) - 1 \right]} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x} \ln(1+x) - 1}{x}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{2x(1+x)}} = e^{-\frac{1}{2}} = f(0). \end{aligned}$$

所以  $f(x)$  在  $x=0$  处连续.

### 提高题

1. 求下列极限:

$$\begin{aligned} (1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+x)^x - a^x}{x^2} (a > 0); \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1+2^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}; \quad (3) \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos \sqrt{x})^{\frac{2}{x}}; \\ (4) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^{\frac{1}{x}} - 1)^{\frac{1}{\ln x}}; \quad (5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - \sin x}{x - \sin x}; \quad (6) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\frac{1}{\cos x - \sin x}}. \end{aligned}$$

解 (1) 这类题应先变形, 再等价无穷小代换或用洛必达法则.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+x)^x - a^x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \left[ \left( 1 + \frac{x}{a} \right)^x - 1 \right]}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left( 1 + \frac{x}{a} \right)^x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln \left( 1 + \frac{x}{a} \right)} - 1}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln \left( 1 + \frac{x}{a} \right)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \frac{x}{a}}{x^2} = \frac{1}{a}. \end{aligned}$$

$$(2) \text{ 属于 } 1^\infty, \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1+2^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left( \frac{1+2^x}{2} - 1 \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \frac{2^x - 1}{2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \frac{x \ln 2}{2}} = e^{\frac{\ln 2}{2}} = \sqrt{2}.$$

$$(3) \text{ 属于 } 1^\infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos \sqrt{x})^{\frac{2}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x} [\cos \sqrt{x} - 1]} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x} \left( -\frac{1}{2}x \right)} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

$$\begin{aligned} (4) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^{\frac{1}{x}} - 1)^{\frac{1}{\ln x}} &= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} \ln (x^{\frac{1}{x}} - 1)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln (e^{\frac{\ln x}{x}} - 1)}{\ln x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \frac{\ln x}{x}}{\ln x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln x - \ln x}{\ln x}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln x - 1}{\ln x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\ln x} - 1}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} - 1} = e^{-1} = \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - \sin x}{x - \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - \cos x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} [1 - (1+x^2)\cos x]}{1 - \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[1 - (1+x^2)\cos x]}{1 - \cos x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x^2} \quad \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x^2} = 1 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1+x^2)\cos x}{\frac{1}{2}x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x\cos x + (1+x^2)\sin x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x\cos x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x^2)\sin x}{x} = -2 + 1 = -1. \end{aligned}$$

$$(6) \text{ 属于 } 1^\infty, \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\frac{1}{\cos x - \sin x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\cos x - \sin x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\cos x \sin x} \cdot \frac{1}{\cos x}} = e^{\sqrt{2}}.$$



2. 设函数  $f(x) = x + a \ln(1+x) + bx \sin x$ ,  $g(x) = kx^3$ , 若  $f(x)$  与  $g(x)$  在  $x \rightarrow 0$  时是等价无穷小, 求  $a, b, k$  的值.

解 因为  $f(x)$  与  $g(x)$  在  $x \rightarrow 0$  时是等价无穷小, 所以  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + a \ln(1+x) + bx \sin x}{kx^3} \quad (\text{洛必达法则})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{a}{1+x} + b \sin x + bx \cos x}{3kx^2} = 1.$$

因为  $\lim_{x \rightarrow 0} 3kx^2 = 0$ , 所以有  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{a}{1+x} + b \sin x + bx \cos x \right) = 0$ , 即  $1 + a + 0 = 0$ , 得  $a = -1$ .

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{(1+x)^2} + 2b \cos x - bx \sin x}{6kx} \quad \left( \text{分子的极限为 } 0, \text{ 得 } b = -\frac{1}{2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{(1+x)^3} - 2b \sin x - bx \cos x}{6k} = 1 \quad \left( \text{得 } k = -\frac{1}{3} \right).$$

所以  $a = -1, b = -\frac{1}{2}, k = -\frac{1}{3}$ .

### 习题 3.3

1. 将  $f(x) = xe^x$  展开成  $n$  阶麦克劳林公式.

解 直接法 利用求积的高阶导数的莱布尼茨公式, 得

$$f^{(n)}(x) = (e^x)^{(n)} x + n(e^x)^{(n-1)} x' + 0 = e^x(x+n),$$

于是  $f(0) = 0, f^{(n)}(0) = n, a_0 = 0, a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{(n-1)!} \quad (n=1, 2, \dots)$ , 余项

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{e^{\theta x}(\theta x + n+1)}{(n+1)!} x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1).$$

因此,  $f(x)$  的  $n$  阶麦克劳林公式为

$$f(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \dots + \frac{x^n}{(n-1)!} + \frac{e^{\theta x}(\theta x + n+1)}{(n+1)!} x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1),$$

或具有佩亚诺余项的  $n$  阶麦克劳林公式为

$$f(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \dots + \frac{x^n}{(n-1)!} + o(x^n).$$

间接法 利用  $e^x$  的  $n-1$  阶麦克劳林公式, 可间接得到函数  $xe^x$  的  $n$  阶麦克劳林公式

$$xe^x = x \left[ 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + o(x^{n-1}) \right] = x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \dots + \frac{x^n}{(n-1)!} + o(x^n).$$

2. 当  $x_0 = -1$  时, 求函数  $f(x) = \frac{1}{x}$  的  $n$  阶泰勒公式.

解  $f(x) = \frac{1}{x}, f(-1) = \frac{1}{-1} = -1; f'(x) = -\frac{1}{x^2}, f'(-1) = -1;$

$$f''(x) = \frac{2}{x^3}, f''(-1) = -2, \dots, f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}, f^{(n)}(-1) = \frac{(-1)^n n!}{(-1)^{n+1}} = -n!.$$

故  $\frac{1}{x} = -1 - (x+1) - (x+1)^2 + \dots - (x+1)^n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} (x+1)^{n+1}.$

3. 按  $x-4$  的乘幂展开多项式  $f(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 4$ .

解  $f(4) = 4^4 - 5 \times 4^3 + 4^2 - 3 \times 4 + 4 = 4^3 + 4 + 4 = 56;$

$$f'(x) = 4x^3 - 15x^2 + 2x - 3, f'(4) = 4 \times 4^3 - 15 \cdot 4^2 + 2 \times 4 - 3 = 21;$$

$$f''(x) = 12x^2 - 30x + 2, f''(4) = 12 \cdot 4^2 - 30 \times 4 + 2 = 74;$$

$$f'''(x) = 24x - 30, \quad f'''(4) = 66; \quad f^{(4)}(x) = 24.$$

故  $f(x) = -56 + 21(x-4) - 37(x-4)^2 + 11(x-4)^3 + (x-4)^4$ .

4. 利用泰勒公式求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x - x^2 \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \right].$$

解 (1)  $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$ , 故

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \left( x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \right)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{3!} + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

(2) 当  $x \rightarrow 0$  时,  $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ ,

当  $x \rightarrow \infty$  时,  $\ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$ ,

故

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x - x^2 \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x - x^2 \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x - x + \frac{1}{2} - \frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

### 提高题

1. 当  $x \rightarrow 0$  时,  $e^x - (ax^2 + bx + 1)$  是比  $x^2$  高阶的无穷小, 求  $a, b$ .

解  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ , 故

$$e^x - (ax^2 + bx + 1) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - (ax^2 + bx + 1) = (1-b)x + \left( \frac{1}{2} - a \right)x^2 + o(x^2) = o(x^2),$$

则  $1-b=0, \frac{1}{2}-a=0$ , 故  $b=1, a=\frac{1}{2}$ .

2. 设  $f(x)$  在  $[-1, 1]$  上具有三阶连续导数, 且  $f(-1)=0, f(1)=1, f'(0)=0$ . 证明: 在  $(-1, 1)$  内至少存在一点  $\xi$ , 使得  $f'''(\xi)=3$ .

证明 将  $f(x)$  在  $x=0$  处展开成二阶麦克劳林公式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(\eta)}{3!}x^3,$$

$$f(1) = f(0) + f'(0) + \frac{f''(0)}{2} + \frac{f'''(\eta_1)}{3!}, \quad \eta_1 \in (0, 1),$$

$$f(-1) = f(0) - f'(0) + \frac{f''(0)}{2} - \frac{f'''(\eta_2)}{3!}, \quad \eta_2 \in (-1, 0),$$

故  $f(1) - f(-1) = \frac{f'''(\eta_1)}{3!} + \frac{f'''(\eta_2)}{3!}$ , 即  $\frac{1}{3!}(f'''(\eta_1) + f'''(\eta_2)) = 1$ , 于是  $f'''(\eta_1) + f'''(\eta_2) = 6$ .

因为  $f(x)$  在  $[-1, 1]$  上具有三阶连续导数, 所以  $f'''(x)$  在  $[\eta_2, \eta_1]$  上连续, 能取到最大值  $M$  和最小值  $m$ , 即

$$m \leq f'''(\eta_1) \leq M, \quad m \leq f'''(\eta_2) \leq M.$$

于是

$$2m \leq f'''(\eta_1) + f'''(\eta_2) \leq 2M, \quad \text{即 } m \leq \frac{f'''(\eta_1) + f'''(\eta_2)}{2} \leq M.$$

由  $f'''(x)$  的连续性知, 存在  $\xi \in [\eta_2, \eta_1] \subset (0, 1)$ , 使得  $f'''(\xi) = \frac{f'''(\eta_1) + f'''(\eta_2)}{2} = 3$ .



3. 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 - \ln(1+x^2)}{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{1}{2}x}$ .

解  $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ ,  $\ln(1+x^2) = x^2 + o(x^2)$ ,  $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$ , 故

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 - \ln(1+x^2)}{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{1}{2}x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) - 1 - x^2 + o(x^2)}{1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2) - 1 - \frac{1}{2}x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)}{-\frac{1}{8}x^2 + o(x^2)} = 12.$$

4. 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} + 2\cos x - 3}{x^4}$ .

解  $e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)$ ,  $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4)$ , 故

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} + 2\cos x - 3}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + 2 - x^2 + \frac{2}{4!}x^4 - 3 + o(x^4)}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^4 + \frac{2}{4!}x^4 + o(x^4)}{x^4} = \frac{7}{12}. \end{aligned}$$

5. 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(\tan x) - \tan(\sin x)}{x - \sin x}$ .

解 解法一  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(\tan x) - \sin(\sin x)}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\tan(\tan x) - \tan(\sin x)] + [\tan(\sin x) - \sin(\sin x)]}{x - \sin x}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(\tan x) - \tan(\sin x)}{x - \sin x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(\sin x) - \sin(\sin x)}{x - \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \sec^2 \xi \cdot \frac{\tan x - \sin x}{x - \sin x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(\sin x) [1 - \cos(\sin x)]}{x - \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x - \sin x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \frac{1}{2} \sin^2 x}{x - \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x [1 - \cos x]}{x - \sin x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} x^3}{x - \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \frac{1}{2} x^2}{\frac{1}{6} x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} x^3}{\frac{1}{6} x^3} = 3 + 3 = 6. \end{aligned}$$

解法二 因为  $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$ ,  $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ , 所以

$$\tan(\tan x) = \tan x + \frac{1}{3} \tan^3 x + o(x^3), \quad \sin(\sin x) = \sin x - \frac{1}{6} \sin^3 x + o(x^3),$$

$$x - \sin x = \frac{1}{6}x^3 + o(x^3),$$

所以

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(\tan x) - \sin(\sin x)}{x - \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x + \frac{1}{3} \tan^3 x - \sin x + \frac{1}{6} \sin^3 x + o(x^3)}{\frac{1}{6} x^3 + o(x^3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\tan x - \sin x}{x^3} + \frac{\tan^3 x}{3x^3} + \frac{\sin^3 x}{6x^3} + \frac{o(x^3)}{x^3}}{\frac{1}{6} + \frac{o(x^3)}{x^3}} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}}{\frac{1}{6}} = 6.$$

6. 设  $f(x) = x^2 \sin x$ , 则  $f^{(2015)}(0) =$  \_\_\_\_\_.

$$\begin{aligned} \text{解 } f^{(2015)}(x) &= (\sin x)^{(2015)} x^2 + 2015(\sin x)^{(2014)} \cdot 2x + \frac{2015 \times 2014}{2} (\sin x)^{(2013)} \cdot 2 \\ &= (\sin x)^{(2015)} x^2 + 2015(\sin x)^{(2014)} \cdot 2x + \frac{2015 \cdot 2014}{2} \sin\left(x + 2013 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot 2, \\ f^{(2015)}(0) &= (\sin x)^{(2015)} \cdot 0 + 2015(\sin x)^{(2014)} \cdot 0 + \frac{2015 \cdot 2014}{2} \sin\left(0 + 2013 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot 2 \\ &= \frac{2015 \times 2014}{2} \sin\left(0 + 2013 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot 2 = 2015 \times 2014. \end{aligned}$$

7. 已知函数  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ , 则  $f^{(3)}(0) =$  \_\_\_\_\_.

解 由函数的麦克劳林级数公式:  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ , 知  $f^{(n)}(0) = n! a_n$ , 其中  $a_n$  为展开式中  $x^n$  的系数. 由于  $f(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots, x \in [-1, 1]$ , 所以  $f^{(3)}(0) = 0$ .

### 习题 3.4

1. 求下面函数的单调区间与极值:

(1)  $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 18x - 7$ ;

(2)  $f(x) = x - \ln x$ ;

(3)  $f(x) = 1 - (x-2)^{\frac{2}{3}}$ ;

(4)  $f(x) = |x|(x-4)$ .

解 (1) 取  $f'(x) = 6x^2 - 12x - 18 = 6(x-3)(x+1) = 0$ , 得  $x = -1, x = 3$ .

当  $x > 3$  或  $x < -1$  时,  $f'(x) > 0$ ; 当  $-1 < x < 3$  时,  $f'(x) < 0$ . 故单增区间  $(-1, +\infty), (3, +\infty)$ ; 单减区间为  $[-1, 3]$ . 极大值  $f(-1) = 3$ , 极小值  $f(3) = -47$ .

(2)  $f(x) = x - \ln x$ , 定义域  $(0, +\infty)$ . 令  $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = 0$ , 得  $x = 1$ .

当  $x < 1$  时  $f'(x) < 0$ ; 当  $x > 1$  时,  $f'(x) > 0$ . 故单增区间  $(1, +\infty)$ ; 单减区间为  $(0, 1]$ . 极小值  $f(1) = 1$ .

(3)  $f'(x) = -\frac{2}{3}(x-2)^{-\frac{1}{3}} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}$ . 当  $x < 2$  时,  $f'(x) > 0$ ; 当  $x > 2$  时,  $f'(x) < 0$ . 所以, 单增

区间为  $(-\infty, 2)$ , 单减区间为  $(2, +\infty)$ , 极大值为  $f(2) = 1$ .

$$(4) f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x, & x > 0, \\ -x^2 + 4x, & x \leq 0; \end{cases} f'(x) = \begin{cases} 2x - 4, & x > 0, \\ -2x + 4, & x < 0, \end{cases} f'(0) \text{ 不存在.}$$

当  $x < 0$  时,  $f'(x) > 0$ ; 当  $0 < x < 2$  时,  $f'(x) < 0$ ; 当  $x > 2$  时,  $f'(x) > 0$ , 故单增区间  $(-\infty, 0), (2, +\infty)$ ; 单减区间为  $(0, 2]$ . 极大值  $f(0) = 0$ , 极小值  $f(2) = -4$ .

2. 求下列函数的极值:

(1)  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7$ ;

(2)  $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ ;

(3)  $f(x) = \sqrt{2+x-x^2}$ ;

(4)  $f(x) = x^2 e^{-x}$ .

解 (1)  $f'(x) = 3x^2 - 6x$ . 令  $f'(x) = 3x^2 - 6x = 0$ , 得驻点  $x = 0, x = 2$ .

本题的二阶导数比较容易求, 而且形式简单, 因此用第二充分条件.  $f''(x) = 6x - 6$ , 故:

$f''(0) = -6, f(x) = x^3 - 3x^2 + 7$  在  $x = 0$  处取得极大值  $f(0) = 7$ ;

$f''(2) = 6, f(x) = x^3 - 3x^2 + 7$  在  $x = 2$  处取得极小值  $f(2) = 3$ .

(2)  $f'(x) = \frac{2[(1+x^2) - x \cdot 2x]}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ . 令  $f'(x) = 0$ , 得  $x = -1, x = 1$ .



本题的二阶导数求起来比较麻烦,判断驻点处的二阶导数符号也麻烦,因此用取得极值的第一充分条件.

当  $x < -1$  时,  $f'(x) < 0$ ; 当  $-1 < x < 1$  时,  $f'(x) > 0$ . 故  $f(x)$  在  $x = -1$  处取得极小值  $f(-1) = -1$ .

当  $-1 < x < 1$  时,  $f'(x) > 0$ ; 当  $x > 1$  时,  $f'(x) < 0$ . 故  $f(x)$  在  $x = 1$  处取得极大值  $f(1) = 1$ .

(3) 函数的定义域为  $[-1, 2]$ ,  $f'(x) = \frac{1}{2} \frac{1-2x}{\sqrt{2+x-x^2}}$ . 令  $f'(x) = 0$ , 得  $x = \frac{1}{2}$ .

当  $-1 < x < \frac{1}{2}$  时,  $f'(x) > 0$ ; 当  $\frac{1}{2} < x < 2$  时,  $f'(x) < 0$ . 故  $f(x)$  在  $x = \frac{1}{2}$  处取得极大值  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$ .

(4)  $f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = xe^{-x}(2-x)$ . 令  $f'(x) = 0$ , 得  $x = 0, x = 2$ .

当  $x < 0$  时,  $f'(x) < 0$ ; 当  $0 < x < 2$  时,  $f'(x) > 0$ . 故  $f(x)$  在  $x = 0$  处取得极小值  $f(0) = 0$ .

当  $0 < x < 2$  时,  $f'(x) > 0$ ; 当  $x > 2$  时,  $f'(x) < 0$ . 故  $f(x)$  在  $x = 2$  处取得极大值  $f(2) = 4e^{-2}$ .

3. 试证方程  $\sin x = x$  只有一个根.

证明 令  $f(x) = x - \sin x$ , 其定义域  $(-\infty, +\infty)$ .

一方面,  $f(x)$  在  $[-2, 2]$  上连续,  $f(-2) = -2 - \sin(-2) < 0$ ,  $f(2) = 2 - \sin(2) > 0$ , 由零点定理,  $f(x) = x - \sin x = 0$  在  $[-2, 2]$  上至少存在一个根.

另一方面,  $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$ , 且  $f'(x)$  不恒等于零, 因此  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上单调增加,  $f(x) = x - \sin x = 0$  在  $(-\infty, +\infty)$  至多有一个根.

故  $f(x) = x - \sin x = 0$  有且仅有一个根.

4. 已知  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上连续, 若  $f(0) = 0$ ,  $f'(x)$  在  $[0, +\infty)$  内存在且单调增加, 证明  $\frac{f(x)}{x}$  在  $(0, +\infty)$  内也单调增加.

证明 令  $F(x) = \frac{f(x)}{x}$ ,  $x \in (0, +\infty)$ , 则

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{xf'(x) - [f(x) - f(0)]}{x^2} \\ &= \frac{xf'(x) - xf'(\xi)}{x^2} \cdot \frac{\xi \in (0, x)}{x} \cdot \frac{x(f'(x) - f'(\xi))}{x^2} > 0, \end{aligned}$$

故  $F(x) = \frac{f(x)}{x}$  在  $(0, +\infty)$  内也单调增加.

5. 证明下列不等式:

(1)  $1 + \frac{1}{2}x > \sqrt{1+x}$ ,  $x > 0$ ; (2)  $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$ ,  $x > 0$ ; (3)  $e^x > ex$ ,  $x > 1$ .

证明 上面三个题都可用泰勒公式做, 还可用单调性做.

(1) 本题用单调性做

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \sqrt{1+x}, \quad x \in [0, +\infty),$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1+x}} > 0, \quad x \in (0, +\infty),$$

则  $f(x)$  在  $x \in [0, +\infty)$  上单调增加, 即对任意  $x > 0$ ,  $f(x) > f(0) = 0$ . 从而对任意  $x > 0$ ,  $1 + \frac{1}{2}x > \sqrt{1+x}$ .

(2) 令  $f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$ , 则  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上连续, 而且

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{1-1+x^2}{1+x} = \frac{x^2}{1+x} > 0 \quad (x > 0),$$

因而  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上单调增加, 当  $x > 0$  时,  $f(x) > f(0)$ , 所以

$$\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} > 0 \quad (x > 0), \text{ 因而 } \ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2} \quad (x > 0).$$

另一方面,取  $g(x) = \ln(1+x) - x$ , 则  $g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x} < 0$ ,  $g(x) = \ln(1+x) - x$  在  $[0, +\infty)$

上单调减少, 当  $x > 0$  时,  $g(x) < g(0) = 0$ , 即  $\ln(1+x) < x$ . 所以有  $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$ ,  $x > 0$ .

(3) 设  $f(x) = e^x - ex$ , 则  $f'(x) = e^x - e$ .

当  $x > 1$  时,  $f'(x) > 0$ , 所以  $f(x)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递增, 故  $f(x) > f(1) = 0$ , 即当  $x > 1$  时,  $e^x > ex$ .

6. 试问  $a$  为何值时,  $f(x) = a \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x$  在  $x = \frac{\pi}{3}$  处取得极值? 是极大值还是极小值? 并求出此极值.

解  $f'(x) = a \cos x + \cos 3x$ , 因在  $x = \frac{\pi}{3}$  处取极值, 则  $f'(\frac{\pi}{3}) = a \cos \frac{\pi}{3} + \cos \pi = \frac{1}{2}a - 1 = 0$ , 于是得  $a = 2$ . 且  $f''(x) = -2 \sin x - 3 \sin 3x$ , 故  $f''(\frac{\pi}{3}) = -2 \sin \frac{\pi}{3} - 3 \sin \pi = -\sqrt{3} < 0$ , 函数  $f(x) = 2 \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x$  在  $x = \frac{\pi}{3}$  处取得极大值, 极大值为  $f(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$ .

### 提高题

1. 证明  $x > 0$  时,  $(x^2 - 1) \ln x \geq (x - 1)^2$ .

证明 令  $\varphi(x) = (x^2 - 1) \ln x - (x - 1)^2$ ,  $x > 0$ , 则

$$\varphi'(x) = 2x \ln x - x + 2 - \frac{1}{x}, \quad \varphi'(1) = 0; \quad \varphi''(x) = 2 \ln x + 1 + \frac{1}{x^2}, \quad \varphi''(1) = 2 > 0;$$

$$\varphi'''(x) = \frac{2(x^2 - 1)}{x^3}.$$

当  $0 < x < 1$  时,  $\varphi'''(x) < 0$ ; 当  $1 < x < +\infty$  时,  $\varphi'''(x) > 0$ . 故  $\varphi''(1)$  为  $\varphi''(x)$  极小值也是最小值, 因而当  $x > 0$  时,  $\varphi''(x) \geq \varphi''(1) = 2 > 0$ . 故  $\varphi'(x)$  单调增加. 由  $\varphi'(1) = 0$  得  $0 < x < 1$  时,  $\varphi'(x) < 0$ ; 当  $1 < x < +\infty$  时,  $\varphi'(x) > 0$ . 因此  $\varphi(1) = 0$  是  $\varphi(x)$  的最小值, 得  $x > 0$  时,  $\varphi(x) \geq \varphi(1) = 0$ , 即  $(x^2 - 1) \ln x \geq (x - 1)^2$ .

2. 设  $x > 0$  时, 方程  $kx + \frac{1}{x^2} = 1$  有且仅有一个实根, 求  $k$  的取值范围.

解 令  $f(x) = kx + \frac{1}{x^2} - 1$ , 则  $f'(x) = k - \frac{2}{x^3}$ . 当  $k \leq 0$  时,  $f'(x) < 0$ ,  $f(x)$  是减函数,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ ,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \begin{cases} -\infty, & k < 0, \\ -1, & k = 0, \end{cases}$  故  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  内有唯一根.

当  $k > 0$  时, 令  $f'(x) = 0$ , 得唯一驻点:  $x = \sqrt[3]{\frac{2}{k}}$ , 讨论如下:

$x$	$(0, \sqrt[3]{\frac{2}{k}})$	$\sqrt[3]{\frac{2}{k}}$	$(\sqrt[3]{\frac{2}{k}}, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

所以当  $f(\sqrt[3]{\frac{2}{k}}) = 0$  时, 即  $k = \frac{2}{9} \sqrt{3}$  时,  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  内有唯一根.

3. 证明方程  $1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} = 0$  无实根.



证明 令  $f(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}, x \in (-\infty, +\infty)$ , 则  $f'(x) = -1 + x - x^2 + x^3 = (x-1)(1+x^2)$ .

令  $f'(x) = 0$ , 得  $x = 1$ . 而  $f''(x) = 1 - 2x + 3x^2, f''(1) = 2 > 0$ .

$f(x)$  在  $x = 1$  处取得唯一的极小值, 也就是最小值  $f(1) = \frac{5}{12} > 0$ .  $f(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}$  的最小值

大于零, 故方程  $1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} = 0$  无实根.

4. 已知方程  $\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} = k$  在区间  $(0, 1)$  内有实根, 确定常数  $k$  的取值范围.

解 设  $f(x) = \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}, x \in (0, 1)$ , 则

$$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)\ln^2(1+x)} + \frac{1}{x^2} = \frac{(1+x)\ln^2(1+x) - x^2}{x^2(1+x)\ln^2(1+x)}.$$

令  $g(x) = (1+x)\ln^2(1+x) - x^2$ , 则  $g(0) = 0, g(1) = 2\ln^2 2 - 1$ .

$$g'(x) = \ln^2(1+x) + 2\ln(1+x) - 2x, \quad g'(0) = 0,$$

$g''(x) = \frac{2(\ln(1+x) - x)}{1+x} < 0, x \in (0, 1)$ , 所以  $g'(x)$  在  $(0, 1)$  上单调减少.

由于  $g'(0) = 0$ , 所以当  $x \in (0, 1)$  时,  $g'(x) < g'(0) = 0$ , 也就是  $g(x)g'(x)$  在  $(0, 1)$  上单调减少, 当  $x \in (0, 1)$  时,  $g(x) < g(0) = 0$ , 进一步得到当  $x \in (0, 1)$  时,  $f'(x) < 0$ , 也就是  $f(x)$  在  $(0, 1)$  上单调减少.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \ln(1+x)}{x \ln(1+x)} = \frac{1}{2}, \quad f(1) = \frac{1}{\ln 2} - 1, \text{ 即 } \frac{1}{\ln 2} - 1 < k < \frac{1}{2}.$$

5. 已知函数  $y = y(x)$  满足关系式  $x^2 + y^2 y' = 1 - y'$ , 且  $y(2) = 0$ , 求  $y(x)$  的极大值和极小值.

解 由  $x^2 + y^2 y' = 1 - y'$ , 得  $y' = \frac{1-x^2}{1+y^2}$ . 令  $y' = \frac{1-x^2}{1+y^2} = 0$ , 得  $x = 1, x = -1$ .

由  $(1+y^2)y' = 1-x^2$ , 得  $y + \frac{1}{3}y^3 = x - \frac{1}{3}x^3 + C$ ; 由  $y(2) = 0$  得  $C = \frac{2}{3}$ , 故  $y + \frac{1}{3}y^3 = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}$ .

当  $x = 1$  时, 可解得  $y = 1, y'' = -1 < 0$ , 函数取得极大值  $y = 1$ ;

当  $x = -1$  时, 可解得  $y = 0, y'' = 2 > 0$ , 函数取得极小值  $y = 0$ .

6. 设  $f(x)$  是二次可微的函数, 满足  $f(0) = -1, f'(0) = 0$ , 且对任意的  $x \geq 0$ , 有  $f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) \geq 0$ , 证明: 对每个  $x \geq 0$ , 都有  $f(x) \geq e^{2x} - 2e^x$ .

证明 首先  $[f''(x) - f'(x)] - 2[f'(x) - f(x)] \geq 0$ , 令  $F(x) = f'(x) - f(x)$ , 则

$$F'(x) - 2F(x) \geq 0, \quad \text{因此 } [F(x)e^{-2x}]' \geq 0.$$

所以  $F(x)e^{-2x} \geq F(0) = 1$ , 或者  $f'(x) - f(x) \geq e^{2x}$ .

进一步有  $[f(x)e^{-x}]' \geq e^x$ , 即  $[f(x)e^{-x} - e^x]' \geq 0$ , 所以  $f(x)e^{-x} - e^x \geq f(0) - 1 = -2$ , 故  $f(x) \geq e^{2x} - 2e^x$ .

7. 设函数  $y = y(x)$  由方程  $2y^3 - 2y^2 + 2xy - x^2 = 1$  所确定, 试求  $y = y(x)$  的驻点, 并判断是否为极值点.

解 将方程  $2y^3 - 2y^2 + 2xy - x^2 = 1$  两边同时对  $x$  求导, 得

$$6y^2 y' - 4yy' + 2y + 2xy' - 2x = 0, \quad (1)$$

两边再同时对  $x$  求导, 得

$$12yy' + 6y^2 y'' - 4(y')^2 - 4yy'' + 2y' + 2y' + 2xy'' - 2 = 0. \quad (2)$$

将  $y' = 0$  代入(1)式中, 得

$$y = x. \quad (3)$$

将(3)式代入原方程中, 得  $y = x = 1$ , 将  $y'(1) = 0, y(1) = 1$  代入(2)式中得  $y''(1) = \frac{1}{2}$ , 所以  $y = y(x)$  的驻点为  $x = 1, (1, 1)$  为极小值点.

## 习题 3.5

1. 求下列函数的最大值和最小值:

$$(1) f(x) = 2x^3 - 3x^2, x \in [-1, 4];$$

$$(2) f(x) = x + \sqrt{1-x}, x \in [-5, 1];$$

$$(3) f(x) = x^4 - 2x^2 + 5, x \in [-2, 2].$$

解 (1)  $f'(x) = 6x^2 - 6x$ . 令  $f'(x) = 6x(x-1) = 0$ , 得驻点  $x=0, x=1$ .

$$f(-1) = -5, f(0) = 0, f(1) = -1, f(4) = 80,$$

则  $f(x)$  在  $[-1, 4]$  上的最小值为  $f(-1) = -5$ , 最大值为  $f(4) = 80$ .

$$(2) f'(x) = \frac{2\sqrt{1-x}-1}{2\sqrt{1-x}}. \text{ 令 } f'(x) = 0 \text{ 解得驻点为 } x = \frac{3}{4}.$$

$$f(-5) = -5 + \sqrt{6}, f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{5}{4}, f(1) = 1,$$

则  $f(x)$  在  $[-5, 1]$  上的最小值为  $f(-5) = -5 + \sqrt{6}$ , 最大值为  $f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{5}{4}$ .

$$(3) f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1). \text{ 令 } f'(x) = 0, \text{ 得驻点 } x=0, x=\pm 1.$$

$$f(\pm 1) = 4, f(0) = 5, f(\pm 2) = 13.$$

则  $f(x)$  在  $[-2, 2]$  上的最小值为  $f(\pm 1) = 4$ , 最大值为  $f(\pm 2) = 13$ .

2. 问函数  $y = x^2 - \frac{54}{x} (x < 0)$  在何处取得最小值?

解 取  $y' = 2x + \frac{54}{x^2} = 0$ , 得  $x = -3$ .

当  $x < -3$  时,  $y' < 0$ ; 当  $x > -3$  时,  $y' > 0$ . 故  $x = -3$  为  $y = x^2 - \frac{54}{x} (x < 0)$  唯一的极小值点, 也为最小值点. 最小值为  $y(-3) = 27$ .

3. 某车间靠墙壁要盖一间长方形小屋, 现有存砖只够砌 20m 长的墙壁, 问应围成怎样的长方形才能使这间小屋的面积最大?

解 设长方形的宽为  $x$ , 则长为  $20 - 2x$ , 面积

$$y = x(20 - 2x), x \in (0, 10).$$

$y' = 20 - 4x$ . 令  $y' = 0$ , 得  $x = 5$ , 且  $y'' = -4 < 0$ , 故  $x = 5$  为  $y = x(20 - 2x)$  唯一极大值点, 所以为最大值点. 最大值为  $y(5) = 50\text{m}^2$ .

4. 要造一个圆柱形的储油罐, 体积为  $V$ , 问底半径  $r$  和高  $h$  等于多少时, 才能使表面积最小? 这时底直径与高的比是多少?

解  $V = \pi r^2 h$ , 故  $h = \frac{V}{\pi r^2}$ .

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{V}{\pi r^2} = 2\left(\pi r^2 + \frac{V}{r}\right), S' = 4\pi r - \frac{2V}{r^2}. \text{ 取 } S' = 0 \text{ 得 } r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

而  $S'' = 4\pi + \frac{4V}{r^3} > 0$ , 则  $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$  时表面积取最小值, 这时  $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}, h = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ .

5. 一房地产公司有 50 套公寓要出租, 当月租金定位 1000 元时, 公寓会全部租出去, 当月租金每套增加 50 元时, 就会多一套公寓租不出去, 而租出去的公寓每月需花费 100 元维修费. 试问房租定位多少时可获得最大收入.

解 设有  $x$  套公寓租不出去, 则房租为  $1000 + 50x$  元, 总收入为  $y$  元, 此时租出公寓  $50 - x$  套, 则

$$y = (1000 + 50x)(50 - x) - 100(50 - x) = (900 + 50x)(50 - x), 0 \leq x \leq 50$$

$$y' = 50(50 - x) + (900 + 50x)(-1) = 2500 - 50x - 900 - 50x = 1600 - 100x.$$

令  $y' = 0$ , 得  $x = 16$ , 且  $y'' = -100 < 0$ , 故  $y$  在唯一驻点处取得极大值, 因而也是最大值. 当  $x = 16$ , 即租



出 34 套公寓,房租定为 1800 元时,总收入最大.

6. 用一块半径为  $R$  的圆形铁皮,剪去一圆心角为  $\alpha$  的扇形后,做成一个漏斗形容器,问  $\alpha$  为何值时,容器的容积最大?

解 设余下部分的圆心角为  $\varphi$  时所卷成的漏斗容积  $V$  最大,漏斗的底半径为  $r$ ,高为  $h$ ,则  $2\pi r = R\varphi$ ,  $h = \sqrt{R^2 - r^2}$ ,  $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{3} r^2 \sqrt{R^2 - r^2}$ . 令  $V' = \frac{\pi}{3} 2r \sqrt{R^2 - r^2} + \frac{\pi}{3} r^2 \frac{-r}{\sqrt{R^2 - r^2}} = 0$ , 得  $r = \frac{\sqrt{6}}{3} R$ , 此时  $\varphi = \frac{2\pi r}{R} = \frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$ , 即当余下的圆心角为  $\varphi = \frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$  时漏斗容积最大.

### 提高题

1. 求内接于椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  而面积最大的矩形各边之长.

解 设  $M(x, y)$  为椭圆上第一象限内任意一点,则以点  $M$  为一顶点的内接矩形的面积为

$$S(x) = 2x \cdot 2y = \frac{4b}{a} x \sqrt{a^2 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq a,$$

$$\text{且 } S(0) = S(a) = 0, S'(x) = \frac{4b}{a} \left[ \sqrt{a^2 - x^2} + x \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right] = \frac{4b}{a} \frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

由  $S'(x) = 0$ , 求得驻点  $x_0 = \frac{a}{\sqrt{2}}$  为唯一的极值可疑点. 依题意,  $S(x)$  存在最大值, 故  $x_0 = \frac{a}{\sqrt{2}}$  是  $S(x)$

的最大值点, 最大值为  $S_{\max} = \frac{4b}{a} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2} = 2ab$ , 对应的  $y$  值为  $\frac{b}{\sqrt{2}}$ , 即当矩形的边长分别为  $\sqrt{2}a, \sqrt{2}b$  时面积最大.

### 习题 3.6

1. 某产品的成本函数为  $C(Q) = 15Q - 6Q^2 + Q^3$ .

(1) 生产数量为多少时, 可使平均成本最小?

(2) 求出边际成本, 并验证边际成本等于平均成本时平均成本最小.

解 (1)  $\overline{C}(Q) = \frac{C(Q)}{Q} = 15 - 6Q + Q^2$ , 取  $(\overline{C}(Q))' = -6 + 2Q = 0$ , 得  $Q = 3$ ,  $(\overline{C}(Q))'' = 2 > 0$ . 当  $Q = 3$  时, 平均成本最小.

(2)  $C'(Q) = 15 - 12Q + 3Q^2$ . 由  $15 - 12Q + 3Q^2 = 15 - 6Q + Q^2$ , 得  $2Q^2 - 6Q = 0$ , 即  $Q = 0$  (舍去),  $Q = 3$ .

2. 已知某厂生产  $Q$  件产品的成本为  $C(Q) = 25000 + 2000Q + \frac{1}{40}Q^2$  (元). 问:

(1) 要使平均成本最小, 应生产多少件产品?

(2) 若产品以每件 5000 元售出, 要使利润最大, 应生产多少件产品?

解 (1) 由  $\overline{C}(Q) = \frac{25000}{Q} + 2000 + \frac{Q}{40} = 2000 + \frac{Q}{20}$ , 得  $\frac{25000}{Q} = \frac{Q}{40}$ , 即  $Q^2 = 400 \times 2500$ , 从而得  $Q = 20 \times 50 = 1000$ . 当  $Q = 1000$  时, 平均成本最小.

$$(2) L = R(Q) - C(Q) = PQ - C(Q) = 5000Q - 25000 - 2000Q - \frac{1}{40}Q^2.$$

取  $L' = 3000 - \frac{1}{20}Q = 0$ , 得  $Q = 60000$ . 而  $L'' = -\frac{1}{20}$ , 故当  $Q = 60000$  时,  $L$  最大.

3. 设某商品的需求函数和成本函数分别为  $P + 0.1x = 80$ ,  $C(x) = 5000 + 20x$ , 其中  $x$  为销售量 (产量),  $P$  为价格. 求边际利润函数, 并计算  $x = 150$  和  $x = 400$  时的边际利润, 解释所得结果的经济意义.

解  $L(x) = R(x) - C(x) = (80 - 0.1x)x - (5000 + 20x)$ ,

$$L'(x) = 60 - 0.2x, \quad L'(150) = 60 - 0.2 \times 150 = 30, \quad L'(400) = 60 - 0.2 \times 400 = -20.$$

当  $x = 150$  时,产量每增加一个单位利润增加 30 个单位;当  $x = 400$  时,产量每增加一个单位利润减少 20 个单位.

4. 某厂每批生产  $x$  单位产品的费用为  $C(x) = 5x + 200$ ,得到的收益是  $R(x) = 10x - 0.01x^2$ ,问每批生产多少单位时才能获得最大利润?

解  $L(x) = R(x) - C(x) = 10x - 0.01x^2 - 5x - 200 = -0.01x^2 + 5x - 200, L'(x) = 5 - 0.02x$ .

令  $L'(x) = 0$ ,得  $x = 250$ ,且  $L''(x) = -0.02 < 0$ ,故在  $x = 250$  处取得最大利润.

5. 某工厂生产某种产品,日总成本为  $C$  元,其中固定成本为 200 元,每多生产一个单位产品,成本增加 10 元,该商品的需求函数为  $Q = 50 - 2P$ ,求  $Q$  为多少时,工厂日总利润最大?

解  $C(Q) = 200 + 10Q$ .

$L(P) = R(P) - C(P) = QP - 200 - 10(50 - 2P) = (50 - 2P)P - 10(50 - 2P) - 200$ .

令  $L'(P) = 70 - 4P = 0$ ,得  $P = \frac{70}{4}$ .而  $L''(P) = -4 < 0$ ,故在  $P = \frac{70}{4}$  处,  $Q = 50 - 2 \times \frac{70}{4} = 15$ ,利润取得最大值.

6. 设某种商品的销售额  $Q$  是价格  $P$  (单位:元)的函数,  $Q = f(P) = 300P - 2P^2$ .

分别求价格  $P = 50$  元及  $P = 120$  元时,销售额对价格  $P$  的弹性,并说明其经济意义.

解  $\frac{EQ}{EP} = \frac{P}{Q} \cdot \frac{dQ}{dP} = \frac{P}{300P - 2P^2} \cdot (300 - 4P)$ .

当  $P = 50$  时,  $\frac{EQ}{EP} = \frac{1}{2}$ ,这说明当  $P = 50$  时,价格增加 1%,需求增加 0.5%.

当  $P = 120$  时,  $\frac{EQ}{EP} = -3$ ,这说明当  $P = 120$  时,价格增加 1%,需求减少 3%.

### 提高题

1. 设生产某产品的平均成本  $C(Q) = 1 + e^{-Q}$ ,其中产量为  $Q$ ,求边际成本.

解  $C(Q) = Q \overline{C(Q)} = Q(1 + e^{-Q})$ ,故  $C'(Q) = 1 + (1 - Q)e^{-Q}$ .

2. 某个体户以每条 10 元的价格购进一批牛仔裤,设此批牛仔裤的需求函数为  $Q = 40 - 2P$ ,问该个体户应将销售价定为多少时,才能获得最大利润?

解  $L = QP - 10Q = (40 - 2P)P - 10(40 - 2P) = -2P^2 + 60P - 400$ ,且  $L' = -4P + 60 = 0$ ,即  $P = 15$ .

$L'' = -4 < 0$ ,故取最大值,即当  $P = 15$  时,获利最大.

3. 设  $f(x) = cx^\alpha$  ( $c > 0, 0 < \alpha < 1$ ) 为一生产函数,其中  $c$  为效率因子,  $x$  为投入量,产品的价格  $P$  与原料价格  $Q$  均为常量,问:投入量为多少时可使利润最大?

解  $L = PCx^\alpha - Qx$ .取  $L' = PC\alpha x^{\alpha-1} - Q = 0$ ,得  $x = \sqrt[\alpha-1]{\frac{Q}{PC\alpha}}$ .

4. 某商品的需求弹性在 1.5~2.0 之间,现打算将该商品的价格下调 12%,那么明年该商品的需求量和总收益将如何变化?变化多少?

解  $\frac{\Delta Q}{Q} = 1.5 \times 12\% = 18\%$ ,  $\frac{\Delta R}{R} = (1 - 1.5) \times (-12\%) = 6\%$ ,

$\frac{\Delta Q}{Q} = 2.0 \times 12\% = 24\%$ ,  $\frac{\Delta R}{R} = (1 - 2.0) \times (-12\%) = 12\%$ ,

即需求量增加 18%~24%,总收益增加 6%~12%.

### 习题 3.7

1. 讨论下列函数的凸性,并求曲线的拐点:

(1)  $y = x^2 - x^3$ ;

(2)  $y = \ln(1 + x^2)$ ;

(3)  $y = xe^x$ ;

(4)  $y = (x+1)^4 + e^x$ ;

(5)  $y = \frac{x}{(x+3)^2}$ ;

(6)  $y = e^{\arctan x}$ .



解 (1)  $y' = 2x - 3x^2, y'' = 2 - 6x$ . 令  $y'' = 0$ , 得  $x = \frac{1}{3}$ .

当  $x < \frac{1}{3}$  时,  $y'' > 0$ ; 当  $x > \frac{1}{3}$  时,  $y'' < 0$ . 所以  $f(x)$  在  $(\frac{1}{3}, +\infty)$  是上凸的, 在  $(-\infty, \frac{1}{3}]$  下凸, 拐点为  $(\frac{1}{3}, y(\frac{1}{3}))$ , 即  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{27})$ .

(2)  $y' = \frac{2x}{1+x^2}, y'' = \frac{2(1+x^2) - 4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}$ . 令  $y'' = 0$ , 得  $x = \pm 1$ .

当  $x > 1$  或  $x < -1$  时,  $y'' \leq 0$ ; 当  $-1 < x < 1$  时,  $y'' > 0$ . 故函数在  $(1, +\infty), (-\infty, -1)$  内上凸; 在  $[-1, 1]$  内下凸. 拐点为  $(1, \ln 2), (-1, \ln 2)$ .

(3)  $y' = e^x + xe^x, y'' = e^x + e^x + xe^x = (x+2)e^x$ . 令  $y'' = 0$ , 得  $x = -2$ .

当  $x < -2$  时,  $y'' < 0$ ; 当  $x > -2$  时,  $y'' > 0$ . 故函数的上凸区间为  $(-\infty, -2)$ , 下凸区间为  $(-2, +\infty)$ , 拐点为  $(-2, -2e^{-2})$ .

(4)  $y' = 4(x+1)^3 + e^x, y'' = 12(x+1)^2 + e^x > 0, y = (x+1)^4 + e^x$  在  $(-\infty, +\infty)$  上下凸, 没有拐点.

(5)  $y' = \frac{1}{(x+3)^2} - \frac{2x}{(x+3)^3} = \frac{3-x}{(x+3)^3}, y'' = \frac{-2}{(x+3)^3} - \frac{2}{(x+3)^3} + \frac{6x}{(x+3)^4} = \frac{6x-4}{(x+3)^4}$ . 令  $y'' = 0$  得  $x = \frac{2}{3}$ .

当  $x < -3$  时,  $y'' < 0$ ; 当  $-3 < x < \frac{2}{3}$  时,  $y'' < 0$ ; 当  $x > \frac{2}{3}$  时,  $y'' > 0$ . 曲线  $y = \frac{x}{(x+3)^2}$  在  $(-\infty, -3), (-3, \frac{2}{3})$  上上凸, 在  $(\frac{2}{3}, +\infty)$  上下凸.

(6)  $y' = e^{\arctan x} \frac{1}{1+x^2}, y'' = e^{\arctan x} \frac{1-2x}{(1+x^2)^2}$ . 令  $y'' = 0$  得  $x = \frac{1}{2}$ .

当  $x < \frac{1}{2}$  时,  $y'' > 0$ ; 当  $x > \frac{1}{2}$  时,  $y'' < 0$ . 曲线  $y = e^{\arctan x}$  在  $(-\infty, \frac{1}{2})$  上下凸, 在  $(\frac{1}{2}, +\infty)$  上上凸.

2. 利用函数的凸性证明下列不等式:

(1)  $\frac{e^x + e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}}, x \neq y$ ; (2)  $x \ln x + y \ln y > (x+y) \ln \frac{x+y}{2}, x > 0, y > 0, x \neq y$ .

证明 (1) 令  $f(x) = e^x$ , 则  $f''(x) = e^x > 0$ , 故  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上是严格下凸的, 从而有

$f(tx_1 + (1-t)x_2) < tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$ . 令  $x_1 = x, x_2 = y, t = \frac{1}{2}$ , 得

$f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) < \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y)$ , 即  $e^{\frac{x+y}{2}} < \frac{e^x + e^y}{2}, x \neq y$ .

(2) 令  $f(x) = x \ln x$ , 则  $f'(x) = \ln x + 1, f''(x) = \frac{1}{x} > 0$ , 故  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上是严格下凸的, 从而有

$f(tx_1 + (1-t)x_2) < tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$ .

令  $x_1 = x, x_2 = y, t = \frac{1}{2}$ , 得  $f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) < \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y)$ ,  $x \neq y$ , 于是

$\frac{x+y}{2} \ln \frac{x+y}{2} < \frac{1}{2}x \ln x + \frac{1}{2}y \ln y$ , 即  $x \ln x + y \ln y > (x+y) \ln \frac{x+y}{2}, x \neq y$ .

3. 当  $a, b$  为何值时, 点  $(1, 3)$  为曲线  $y = ax^3 + bx^2$  的拐点.

解 因为点  $(1, 3)$  在曲线  $y = ax^3 + bx^2$  上, 故得  $a + b = 3$ .

又  $(1, 3)$  为  $y = ax^3 + bx^2$  的拐点, 而  $y' = 3ax^2 + 2bx, y'' = 6ax + 2b$ , 所以  $6a + 2b = 0 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}, b = \frac{9}{2}$ .

4. 求下列曲线的渐近线:

(1)  $y = \ln x$ ;

(2)  $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ ;

(3)  $y = \frac{x}{3-x^2}$ ;

(4)  $y = \frac{x^2}{2x-1}$ .

解 (1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ , 所以没有水平渐近线;  $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ , 故  $x=0$  为铅直渐近线;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ , 所以没有斜渐近线;

(2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$ , 所以  $y=0$  为水平渐近线; 没有铅直渐近线;  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$ , 所以没有斜渐近线;

(3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{3-x^2} = 0$ , 所以  $y=0$  为水平渐近线;  $\lim_{x \rightarrow \pm\sqrt{3}} y = \lim_{x \rightarrow \pm\sqrt{3}} \frac{x}{3-x^2} = \infty$ , 故  $x = \pm\sqrt{3}$  为铅直渐近线;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{(3-x^2)x} = 0$ , 所以没有斜渐近线;

(4)  $\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2x-1} = \infty$ , 所以没有水平渐近线;  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} y = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{x^2}{2x-1} = \infty$ , 故  $x = \frac{1}{2}$  为铅直渐近线;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{(2x-1)x} = \frac{1}{2}$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (y-x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2}{2x-1} - \frac{1}{2}x \right) = -\frac{1}{4}$ , 所以  $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$  为斜渐近线.

5. 作图题(略).

### 提高题

1. 曲线  $y = x \left( 1 + \arcsin \frac{2}{x} \right)$  的斜渐近线为\_\_\_\_\_.

解  $a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left( 1 + \arcsin \frac{2}{x} \right)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \arcsin \frac{2}{x} \right) = 1$ ,

$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - ax) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ x \left( 1 + \arcsin \frac{2}{x} \right) - x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( x \arcsin \frac{2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \frac{2}{x} = 2$ ,

故斜渐近线为  $y = x + 2$ .

2. 求曲线  $y = \frac{x^3}{1+x^2} + \arctan(1+x^2)$  的斜渐近线方程.

解  $a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3}{1+x^2} + \arctan(1+x^2)}{x} = 1$ ,  $b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^3}{1+x^2} + \arctan(1+x^2) - x \right] = \frac{\pi}{2}$ .

故斜渐近线为  $y = x + \frac{\pi}{2}$ .

3. 设函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内连续, 其中二阶导数  $f''(x)$  的图形如图 3-2 所示, 则曲线  $y = f(x)$  的拐点的个数为( ).

A. 0      B. 1      C. 2      D. 3

解  $f''(x)$  正负的分界点有两个, 所以拐点有两个, 故选 C.

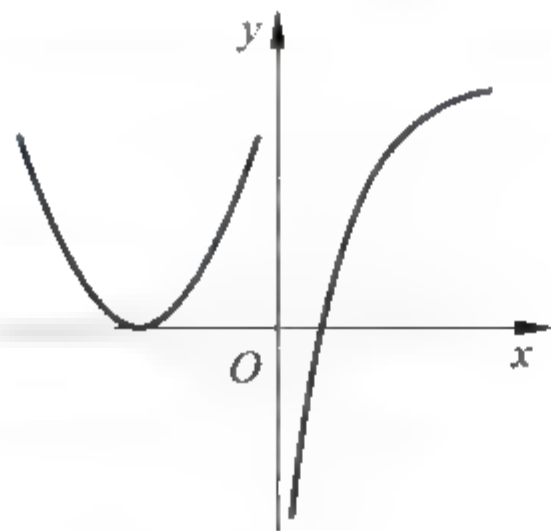


图 3-2

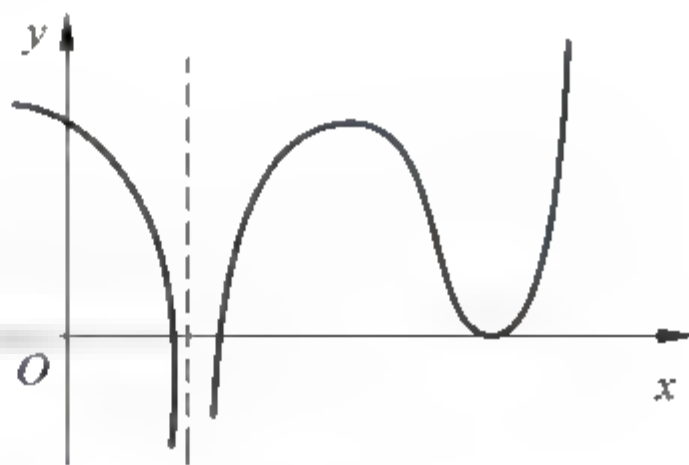


图 3-3

4. 设函数  $y = f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内连续, 其导函数的图形如图 3-3 所示, 则( ).

A. 函数  $f(x)$  有 2 个极值点, 曲线  $y = f(x)$  有 2 个拐点



B. 函数  $f(x)$  有 2 个极值点, 曲线  $y=f(x)$  有 3 个拐点

C. 函数  $f(x)$  有 3 个极值点, 曲线  $y=f(x)$  有 1 个拐点

D. 函数  $f(x)$  有 3 个极值点, 曲线  $y=f(x)$  有 2 个拐点

解  $f'(x)$  的正负分界点有 2 个, 所以有 2 个极值点.  $f'(x)$  单调减少单调增加的分界点有 3 个, 所以有 3 个拐点, 故选 B.

5. 曲线  $\begin{cases} x = \frac{3t}{1+t^3}, \\ y = \frac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}$  的斜渐近线方程是: \_\_\_\_\_.

解 当  $t \rightarrow -1$  时,  $x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty$ , 设斜渐近线为  $y=ax+b$ .

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{\frac{3t^2}{1+t^3}}{\frac{3t}{1+t^3}} = \lim_{t \rightarrow -1} t = -1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - ax) = \lim_{t \rightarrow -1} \left( \frac{3t^2}{1+t^3} + \frac{3t}{1+t^3} \right) = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{3t(t+1)}{1+t^3} = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{3t}{1-t+t^2} = -1.$$

故斜渐近线为  $y = -x - 1$ .

6. 设函数  $f(x)$  满足关系  $f''(x) = x - (f'(x))^2$ , 且  $f'(0) = 0$ , 证明: 点  $(0, f(0))$  是曲线  $y = f(x)$  的拐点.

证明 由关系式  $f''(x) = x - (f'(x))^2$ , 令  $x=0$ , 得  $f''(0) = 0$ .

等式两端求导, 得  $f'''(x) = 1 - 2f'(x)f''(x)$ , 因此  $f'''(0) = 1$ .

再由  $f'''(x)$  的连续性可知, 在  $x=0$  附近,  $f'''(x) > 0$ , 所以  $f''(x)$  单增,  $f''(x)$  在  $x=0$  的两侧异号, 故点  $(0, f(0))$  是曲线  $y = f(x)$  的拐点.

### 复习题 3

#### 1. 填空题

(1) 设  $f(x) = x^2$ , 则在  $x, x+\Delta x$  之间满足拉格朗日中值定理结论的  $\xi =$  \_\_\_\_\_.

(2) 设函数  $g(x)$  在  $[a, b]$  上连续,  $(a, b)$  内可导, 则至少存在一点  $\xi \in (a, b)$ , 使  $e^{g(b)} - e^{g(a)} =$  \_\_\_\_\_ 成立.

(3)  $f(x) = x^n e^{-x} (n > 0, x \geq 0)$  的单增区间是 \_\_\_\_\_, 单减区间是 \_\_\_\_\_.

(4) 若点  $\left(1, \frac{4}{3}\right)$  为曲线  $y = ax^3 - x^2 + b$  为拐点, 则  $a =$  \_\_\_\_\_,  $b =$  \_\_\_\_\_.

(5) 曲线  $y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$  的水平渐近线为 \_\_\_\_\_, 铅直渐近线为 \_\_\_\_\_.

解 (1)  $f'(\xi) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x,$

而  $f'(x) = 2x$ , 故得  $2\xi = 2x + \Delta x$ , 则  $\xi = x + \frac{\Delta x}{2}$ .

(2) 令  $f(x) = e^{g(x)}$ , 则  $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$ , 即  $e^{g(b)} - e^{g(a)} = e^{g(\xi)} g'(\xi)(b-a)$ .

(3) 令  $f'(x) = nx^{n-1}e^{-x} - x^n e^{-x} = e^{-x}x^{n-1}(n-x) = 0$ , 则得  $x=0, x=n$ . 当  $0 < x < n$  时,  $f'(x) > 0$ ; 当  $x > n$  时,  $f'(x) < 0$ . 故  $f(x)$  在  $[0, n]$  上单调递增, 在  $[n, +\infty)$  上单调递减.

(4)  $y' = 3ax^2 - 2x, y'' = 6ax - 2$ . 根据题意有  $a - 1 + b = \frac{4}{3}, y''(1) = 6a - 2 = 0$ . 解得  $a = \frac{1}{3}, b = 2$ .

(5)  $\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = 1$ , 所以  $y=1$  为水平渐近线;  $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = 0$ , 所以  $x=1$  为铅

直渐近线.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{x} = 0$ , 所以没有斜渐近线.

## 2. 选择题

(1) 在  $[-1, 1]$  上满足罗尔定理的条件的函数是( ).

- A.  $\ln|x|$       B.  $e^x$       C.  $1-x^2$       D.  $\frac{2}{1-x^2}$

(2) 正确应用洛必达法则求极限的式子是( ).

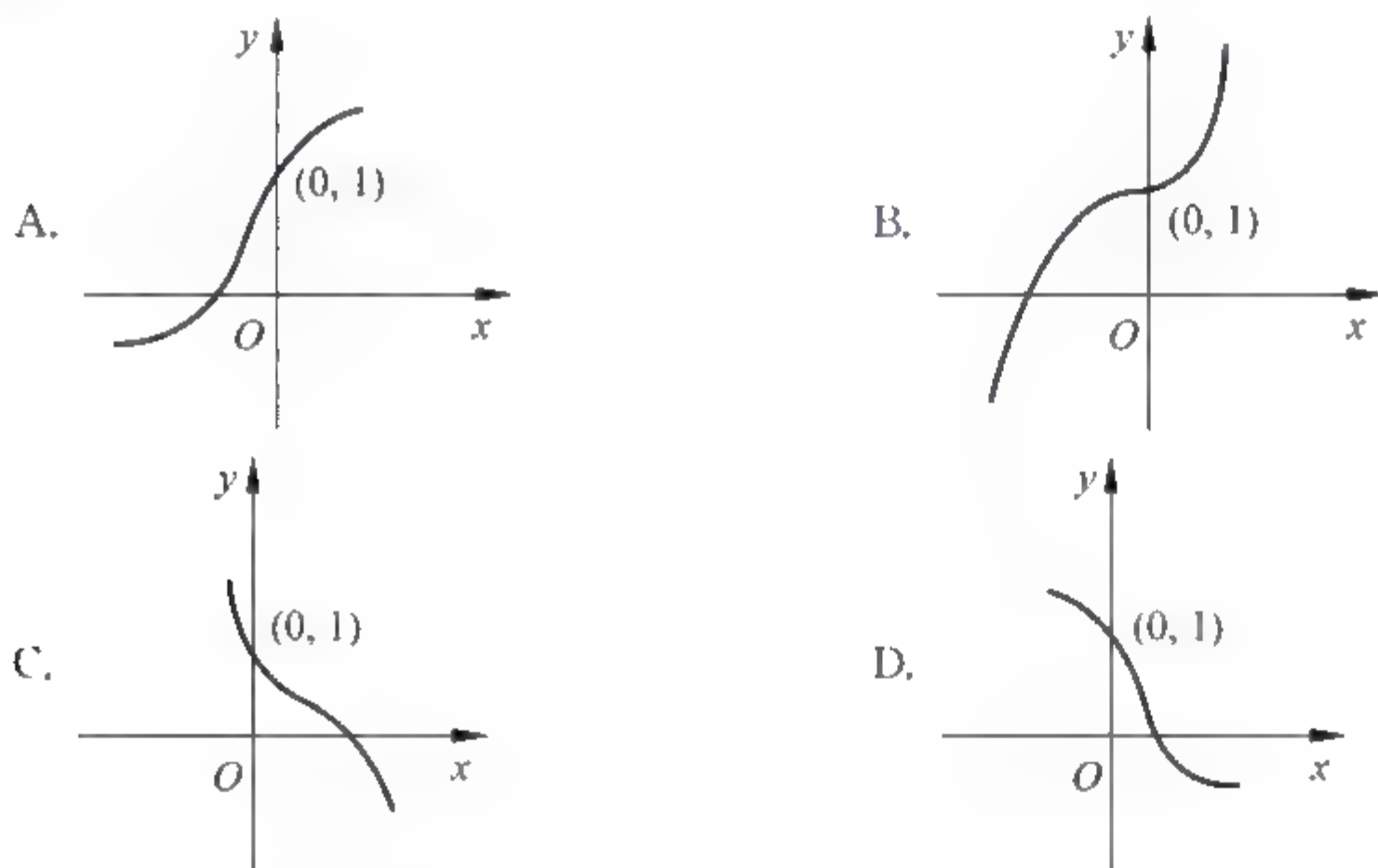
- A.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{e^x} = 0$   
 B.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x)$  不存在  
 C.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left( \frac{1}{x} - \cot x \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^2 \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{3x^2} = \frac{1}{3}$   
 D.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x}(e^{2x} - 1)}{e^{-x}(e^{2x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^{2x}}{2e^{2x}} = 1$

(3) 方程  $e^x - x - 1 = 0$  ( ).

- A. 没有实根      B. 有且仅有一个实根  
 C. 有且仅有两个实根      D. 有三个不同实根

(4) 函数  $y = f(x)$  具有下列特征:  $f(0) = 1, f'(0) = 0$ . 当  $x \neq 0$  时,  $f'(x) > 0, f''(x) = \begin{cases} < 0, & x < 0, \\ > 0, & x > 0, \end{cases}$  则

其图形为( ).

(5) 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续,  $f(a) = f(b)$ , 且  $f(x)$  不恒为常数, 则在  $(a, b)$  内( ).

- A. 必有最大值或最小值      B. 既有极大值又有极小值  
 C. 既有最大值又有最小值      D. 至少存在一点  $\xi$ , 使  $f'(\xi) = 0$

解 (1)  $\ln|x|$  在  $x=0$  处无定义, 更谈不上在  $[-1, 1]$  上连续, 不满足罗尔定理条件;  
 $e^{-1} \neq e^1$ , 不满足罗尔定理条件;

$y = 1 - x^2$  在  $[-1, 1]$  上连续, 在  $(-1, 1)$  内可导,  $1 - (-1)^2 = 1 - 1^2$ , 满足罗尔定理条件;

$y = \frac{2}{1-x^2}$  在  $x = -1, x = 1$  处没有定义, 更谈不上在  $[-1, 1]$  上连续, 不满足罗尔定理条件;

故选 C.

(2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{e^x}$  已经不是未定式了, 而是分子趋于 1, 分母趋于 1;

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x) = 2$ ;

C 正确; D 只对  $x \rightarrow +\infty$  成立, 对  $x \rightarrow -\infty$  不成立;



故选 C.

(3)  $f(x) = e^x - x - 1$ , 由  $f'(x) = e^x - 1 = 0$ , 得  $x = 0$ .

当  $x < 0$  时,  $f'(x) = e^x - 1 < 0$ , 故  $f(x)$  在  $(-\infty, 0)$  上单调减少; 当  $x > 0$  时,  $f'(x) = e^x - 1 > 0$ , 故  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调增加. 而  $f(0) = 0$ , 故  $f(x) = e^x - x - 1$  在  $x = 0$  处取得唯一极小值 0, 也是最小值. 所以  $e^x - x - 1 = 0$  有且仅有一个根  $x = 0$ .

故选 B.

(4) B.

(5) 没说可导, 故选 A.

3. 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (1+2x)^{\frac{1}{2}}}{\ln(1+x^2)};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{1 - 2\sin x}{\cos 3x};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\pi - 2\arctan x) \ln x;$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right);$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^{2x} - 1} \right);$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x^2)^{\frac{1}{x}};$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}.$$

解 (1) 原式  $\xrightarrow{\frac{0}{0} \text{型}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2(1+x)} = \frac{1}{2}.$

(2) 解法一  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (1+2x)^{\frac{1}{2}}}{\ln(1+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\frac{1}{2}\ln(1+2x)}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{2}\ln(1+2x)} (e^{x - \frac{1}{2}\ln(1+2x)} - 1)}{x^2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{2} \cdot 2x} \left( x - \frac{1}{2} \ln(1+2x) \right)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{1}{2} \ln(1+2x)}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1+2x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2+4x-2}{2(1+2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{4x(1+2x)} = 1.$$

解法二  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (1+2x)^{\frac{1}{2}}}{\ln(1+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\frac{1}{2}\ln(1+2x)}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{2}\ln(1+2x)} (e^{x - \frac{1}{2}\ln(1+2x)} - 1)}{x^2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{2} \cdot 2x} \left( x - \frac{1}{2} \ln(1+2x) \right)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{1}{2} \ln(1+2x)}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \ln(1+2x)}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(2x)^2}{2x^2} = 1.$$

(3) 原式  $= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{-2\cos x}{-3\sin 3x} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$

(4)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\pi - 2\arctan x) \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi - 2\arctan x}{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot \frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{(\ln x)^2} \cdot \frac{1}{x}} = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(\ln x)^2}{1+x^2}$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2 + x \ln x \cdot \frac{1}{x}}{2x} = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2 + \ln x}{2x}$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\ln x + 1}{2x} = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{2x} = 0.$$

(5) 解法一 原式  $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x \ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \quad (\ln(1+x) \sim x)$

$$\begin{aligned} & \frac{0}{0} \text{ 型 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x}}{2x} \text{ (通分)} \\ & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2x} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

解法二  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x \ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \frac{1}{2}.$

(6) 解法一 利用洛必达法则.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^{2x} - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1 - x}{x(e^{2x} - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1 - x}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{2x} - 1}{4x} \left( \frac{1}{0} \text{ 型} \right) = \infty.$$

解法二 利用等价无穷小.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^{2x} - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1 - x}{x(e^{2x} - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - x}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2x} = \infty.$$

(7) 属于  $1^\infty$  型.

解法一  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x^2)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x}} = e^0 = 1.$

解法二  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x^2)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x}} = e^0 = 1.$

(8) 利用泰勒公式

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4), \quad e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2!} \left( \frac{x^2}{2} \right)^2 + o(x^4),$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left( 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4) \right) - \left( 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4) \right)}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{2}{24}x^4 + o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{12}. \end{aligned}$$

注 (1)  $o(x^4) \pm o(x^4) = o(x^4).$

(2) 此题用洛必达法则会麻烦.

4. 证明: (1) 当  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  时, 有  $\tan x + 2\sin x > 3x$  成立;

(2) 若  $x > 0$ , 则  $e^x > 1+x$ ;

(3) 设  $x > 0$ , 则  $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$ .

证明 (1) 令  $f(x) = \tan x + 2\sin x - 3x, 0 < x < \frac{\pi}{2}$ .

$$f'(x) = \sec^2 x + 2\cos x - 3, \quad f''(x) = 2\sec^2 x \tan x - 2\sin x = 2\sin x \left( \frac{1}{\cos^3 x} - 1 \right) > 0, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

则  $f'(x) = \sec^2 x + 2\cos x - 3$  在  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$  上单调增加. 故对于任意  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ,  $f'(x) = \sec^2 x + 2\cos x - 3 >$

$f'(0) = 0$ . 则  $f(x) = \tan x + 2\sin x - 3x$  在  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$  上单调增加. 对于任意  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ,  $f(x) = \tan x + 2\sin x -$

$3x > f(0) = 0$ , 即有  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  时,  $\tan x + 2\sin x > 3x$ .

(2) 令  $F(x) = e^x - 1 - x$ , 则  $F'(x) = e^x - 1$ . 当  $x > 0$  时,  $F'(x) > 0$ , 从而  $F(x)$  在  $(0, +\infty)$  单增, 因为  $F(0) = 0$ , 故  $F(x) > 0$ , 即  $e^x > 1+x$ .

(3) 令  $f(x) = x - \frac{x^2}{2} - \ln(1+x)$ , 则  $f'(x) = 1 - x - \frac{1}{1+x} = \frac{x^2}{1+x}$ . 因  $x > 0$ , 则  $f'(x) < 0$ , 从而  $f(x)$  在



$(0, +\infty)$  单减, 故  $f(x) < f(0) = 0$ , 即  $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x)$ .

令  $g(x) = \ln(1+x) - x$ , 则  $g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1$ . 当  $x > 0$  时,  $g'(x) < 0$ , 从而  $g(x)$  在  $(0, +\infty)$  单减, 故  $g(x) < g(0) = 0$ , 即  $\ln(1+x) < x$ .

综上所述,  $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$ .

5. 求函数  $y = (x-1)\sqrt[3]{x^2}$  的极值与单调区间.

解  $y' = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}}$ .

当  $x = \frac{2}{5}$  时,  $y' = 0$ ; 当  $x = 0$  时,  $y'$  不存在.

当  $x < 0$  时,  $y' > 0$ , 故  $(-\infty, 0)$  为单增区间; 当  $0 < x < \frac{2}{5}$  时,  $y' < 0$ , 故  $[0, \frac{2}{5})$  为单减区间; 当  $x > \frac{2}{5}$  时,  $y' > 0$ , 故  $[\frac{2}{5}, +\infty)$  为单增区间.

于是得, 当  $x = 0$  时,  $y = (x-1)\sqrt[3]{x^2}$  取得极大值 0; 当  $x = \frac{2}{5}$  时,  $y = (x-1)\sqrt[3]{x^2}$  取得极小值  $-\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}}$ .

6. 求函数  $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 14$  的单调区间.

解  $y' = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$ .

当  $x < -1$  时,  $y' > 0$ ; 当  $-1 < x < 3$  时,  $y' < 0$ ; 当  $x > 3$  时,  $y' > 0$ . 故  $y$  在  $(-\infty, -1]$  及  $[3, +\infty)$  单增, 在  $[-1, 3]$  单减.

7. 求函数  $y = \frac{\ln^2 x}{x}$  的单调区间与极值.

解  $y' = \frac{(2 - \ln x) \ln x}{x^2}$ . 令  $y' = 0$ , 得  $x = 1$  或  $e^2$ , 故可疑极值点为  $1, e^2$ .

$x$	$(0, 1)$	1	$(1, e^2)$	$e^2$	$(e^2, +\infty)$
$y'$	—		+		—
$y$	$\searrow$	极小值 0	$\nearrow$	极大值 $\frac{4}{e^2}$	$\searrow$

8. 求函数  $y = 2e^x + e^{-x}$  的极值.

解  $y' = 2e^x - e^{-x}$ . 令  $y' = 0$ , 得  $x = -\frac{1}{2}\ln 2$ . 当  $x < -\frac{1}{2}\ln 2$  时,  $y' < 0$ , 从而  $y$  单减; 当  $x > -\frac{1}{2}\ln 2$  时,  $y' > 0$ , 从而  $y$  单增. 故  $x = -\frac{1}{2}\ln 2$  时,  $y$  取极小值 0.

9. 函数  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d (a > 0)$  的系数满足什么关系时, 这个函数没有极值.

解  $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ . 因  $a > 0$ , 则  $y'$  是开口向上的抛物线, 要使  $y$  没有极值, 则必须使  $y$  在  $(-\infty, +\infty)$  是单增或单减, 即必须满足  $y' > 0$  或  $y' < 0$ . 只有当  $(2b)^2 - 4 \cdot 3ac < 0$  时, 才能使  $y' > 0$  成立, 即  $b^2 < 3ac$  时,  $y$  没有极值.

10. 求函数  $y = x \ln x$  在  $(0, e]$  上的最大值与最小值.

解  $y' = \ln x + 1$ . 令  $y' = 0$ , 得  $x = \frac{1}{e}$ .

$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$ ,  $y\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$ ,  $y(e) = e$ . 故  $y = x \ln x$  在  $(0, e]$  上的最大值为  $y(e) = e$ , 最小值为

$$y\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}.$$

11. 求  $y = x^4 - 2x^3 + 1$  的凹凸区间及拐点.

解  $y' = 4x^3 - 6x^2$ ,  $y'' = 12x^2 - 12x = 12x(x-1)$ . 令  $y'' = 0$ , 得  $x = 0, x = 1$ .

$x$	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$y''$	+	0	-	0	+
$y$	∪	拐点(0,1)	∩	拐点(1,0)	∪

12. 试决定  $y = k(x^2 - 3)^2$  中的  $k$  的值, 使曲线的拐点处的法线通过原点.

解  $y' = 4kx(x^2 - 3)$ ,  $y'' = 12k(x^2 - 1)$ . 令  $y'' = 0$ , 得  $x = 1$  或  $-1$ , 则拐点为  $(1, 4k)$  及  $(-1, 4k)$ .

在拐点  $(1, 4k)$  处切线斜率为  $y'(1) = 8k$ , 从而在拐点  $(1, 4k)$  处法线斜率为  $\frac{1}{8k}$ , 法线方程为  $y - 4k =$

$\frac{1}{8k}(x-1)$ , 因法线过原点, 所以  $k = \pm \frac{\sqrt{2}}{8}$ .

在拐点  $(-1, 4k)$  处切线斜率为  $y'(-1) = -8k$ , 法线方程为  $y - 4k = \frac{1}{8k}(x+1)$ , 因法线过原点, 所以  $k = \pm \frac{\sqrt{2}}{8}$ . 故  $k = \pm \frac{\sqrt{2}}{8}$  时, 曲线的拐点处的法线通过原点.

13. 判断函数  $y = \frac{x}{1+x}$  的单调性, 并证明  $\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$  ( $a, b \in \mathbf{R}$ ).

证明  $y' = \frac{1}{(1+x)^2} > 0, x > 0$ , 故  $y = \frac{x}{1+x}$  在  $[0, +\infty)$  上单调增加.

由于  $|a+b| \leq |a| + |b|$ , 故  $\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$ .

14. 判定  $e^\pi$  及  $\pi^e$  哪个大.

【分析】  $b > a \geq e$ . 比较  $a^b$  和  $b^a$  只需比较  $b \ln a$  和  $a \ln b$ . 比较  $\frac{\ln a}{a}$  和  $\frac{\ln b}{b}$ . 设  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$  只需讨论  $f(x)$  的单调性.

解 令  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ , 则  $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$  ( $x > 0$ ). 取  $f'(x) = 0$ , 则  $x = e$ .

当  $x > e$  时,  $f'(x) < 0$ , 即  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$  在  $[e, +\infty)$  上单调减少. 从而当  $x > e$  时, 有  $f(x) < f(e)$ .

而  $\pi > e$ , 则  $f(\pi) = \frac{\ln \pi}{\pi} < f(e) = \frac{\ln e}{e}$ , 于是得

$$\frac{\ln \pi}{\pi} < \frac{\ln e}{e} \Rightarrow e \ln \pi < \pi \ln e \Rightarrow \ln \pi^e < \ln e^\pi \Rightarrow \pi^e < e^\pi.$$

15. 在半径为  $R$  的球内, 求体积最大的内接圆柱体的高.

解 设圆柱体的高为  $x$ , 则圆柱体底面圆直径为  $\sqrt{(2R)^2 - x^2}$ , 圆柱体体积

$$V = \pi \left( \frac{\sqrt{(2R)^2 - x^2}}{2} \right)^2 \cdot x = \frac{\pi}{4} (4R^2 x - x^3), \quad 0 < x < 2R.$$

$V' = \frac{\pi}{4} (4R^2 - 3x^2)$ . 令  $V' = 0$ , 得  $x = \frac{2\sqrt{3}R}{3}$ .

$V'' = -\frac{3\pi}{2} x < 0$  ( $x > 0$ ), 故  $V'' \left( \frac{2\sqrt{3}R}{3} \right) < 0$ ,  $x = \frac{2\sqrt{3}R}{3}$  为  $V$  的唯一极大值点, 因此为最大值点. 即当高

$x = \frac{2\sqrt{3}R}{3}$  时, 内接圆柱体的体积最大.



16. 某工厂生产某产品, 年产量为  $x$  万台, 总成本为  $c$  万元, 其中固定成本 2 万元, 每生产一万台, 成本增加 2 万元, 市场上可销售此种商品 300 万台, 其销售收入

$$R(x) = \begin{cases} 6x - x^2 + 1, & 0 \leq x \leq 3(\text{万元}), \\ 10, & x > 3(\text{万元}), \end{cases}$$

问每年生产多少台, 总利润最大?

解 设利润函数为  $L(x)$ , 则

$$L(x) = \begin{cases} 6x - x^2 + 1 - (2 + 2x), & 0 \leq x \leq 3, \\ 10 - (2 + 2x), & x > 3, \end{cases}$$

$$L'(x) = \begin{cases} -2x + 4, & 0 < x < 3, \\ -2, & x = 3, \\ -2, & x > 3. \end{cases}$$

令  $L'(x) = 0$ , 得  $x = 2$ , 且  $L''(2) < 0$ . 故当  $x = 2$  时利润取得最大值  $L(2) = 3$  万元.

17. 某商品的需求函数为  $Q = 80 - P^2$ , 其中  $P$  为该商品的价格.

(1) 求  $P = 4$  时的需求弹性, 并说明其经济意义;

(2) 当  $P = 4$  时的价格上涨 1% 时, 总收益将变化百分之几? 是增加还是减少?

解 (1)  $\frac{EQ}{EP} = \frac{P}{Q} \frac{dQ}{dP} = \frac{P}{80 - P^2} \cdot (-2P) = -0.5$ , 即当  $P = 4$  时, 价格增加 1%, 需求量降低 0.5%.

(2)  $R = QP = P(80 - P^2)$ ,  $\frac{dR}{dP} = 80 - 3P^2$ ,

$$\frac{ER}{EP} = \frac{P}{R} \frac{dR}{dP} = \frac{P}{P(80 - P^2)} \cdot (80 - 3P^2) = \frac{80 - 3P^2}{80 - P^2}, \quad \frac{ER}{EP} \Big|_{P=4} = 0.5.$$

即当  $P = 4$  时, 价格增加 1%, 总收益增加 0.5%.

18. 求下列函数曲线的渐近线:

$$(1) y = \frac{x}{1-x^2}; \quad (2) y = xe^{\frac{1}{x^2}}; \quad (3) y = \frac{x^2}{(1-x)^2}; \quad (4) y = \frac{x^3}{(1-x)^2}.$$

解 (1) 水平渐近线:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1-x^2} = 0$ , 故  $y = 0$  为  $y = \frac{x}{1-x^2}$  的水平渐近线;

铅直渐近线:  $\lim_{x \rightarrow \pm 1} \frac{x}{1-x^2} = \infty$ , 故  $x = 1$  和  $x = -1$  为  $y = \frac{x}{1-x^2}$  的铅直渐近线;

斜渐近线:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1-x^2} = 0$ , 故不存在斜渐近线.

(2) 水平渐近线:  $\lim_{x \rightarrow \infty} xe^{\frac{1}{x^2}} = \infty$ , 因此没有水平渐近线;

铅直渐近线:  $\lim_{x \rightarrow 0} xe^{\frac{1}{x^2}} = \infty$ , 故  $x = 0$  为铅直渐近线;

斜渐近线:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xe^{\frac{1}{x^2}}}{x} = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xe^{\frac{1}{x^2}}}{x} - x = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{t^2} - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{t} = 0$ , 故  $y = x$  为斜渐近线.

(3) 水平渐近线:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(1-x)^2} = 1$ , 故  $y = 1$  为  $y = \frac{x^2}{(1-x)^2}$  的水平渐近线;

铅直渐近线:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{(1-x)^2} = \infty$ , 故  $x = 1$  为  $y = \frac{x^2}{(1-x)^2}$  的铅直渐近线;

斜渐近线:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(1-x)^2} = 0$ , 因此不存在斜渐近线.

(4) 水平渐近线:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{(1-x)^2} = \infty$ , 故不存在水平渐近线;

铅直渐近线:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3}{(1-x)^2} = \infty$ , 故  $x = 1$  为  $y = \frac{x^3}{(1-x)^2}$  的铅直渐近线;

斜渐近线:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{(1-x)^2} = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^3}{(1-x)^2} - x \right] = -2$ , 故斜渐近线为  $y = -x + 2$ .

### 自测题 3 答案

1. (1) 只需要逐个验证, 选 B.

(2)  $\forall x \in [a, b]$ , 由  $(x-\xi)f'(x) \geq 0$  得:

当  $a < x < \xi$  时,  $f'(x) \leq 0$ , 当  $\xi < x < b$  时,  $f'(x) \geq 0$ . 从而有  $f(x)$  在  $\xi$  取得唯一极小值, 即  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的最小值为  $f(\xi)$ , 而  $f(\xi) > 0$ , 所以在  $[a, b]$  上  $f(x) > 0$ . 故选 D.

(3)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  存在是  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$  存在的充分条件.  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  不存在时  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$  也可能存在. 故选 B.

(4) D; (5) D.

2. 解 (1) 设  $f(x) = x^5 - 5x + 1$ .

一方面,  $f(x)$  在  $[-1, 1]$  上连续,  $f(-1) = 5$ ,  $f(1) = -3$ , 由零点存在定理,  $f(x) = 0$  在  $(-1, 1)$  内至少有一根.

另一方面,  $f'(x) = 5x^4 - 5 = 5(x^4 - 1)$ , 当  $x \in (-1, 1)$  时,  $f'(x) < 0$ , 即  $f(x)$  在  $[-1, 1]$  上单调减少, 所以  $f(x) = 0$  在  $(-1, 1)$  内至多有一根.

所以  $f(x) = 0$  在  $(-1, 1)$  内有且仅有一个实根.

(2)  $f'(x) = e^{-x}(1-x)$ . 令  $f'(x) = e^{-x}(1-x) = 0$  得驻点  $x = 1$ .  $f(1) = e^{-1}$ ,  $f(2) = 2e^{-2}$ ,  $f(x)$  在  $[1, 2]$  上的最大值为  $e^{-1}$ .

(3)  $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ ,  $y'' = 6ax + 2b$ . 由题意知

$$y(-2) = -8a + 4b - 2c + d = 44, \quad y'(-2) = 12a - 4b + c = 0,$$

$$y(1) = a + b + c + d = -10, \quad y'(1) = 6a + 2b = 0.$$

解得  $a = 1, b = -3, c = -24, d = 16$ .

$$(4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\arctan x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\arctan x} = 0.$$

$$(5) R(Q) = PQ = 10Q - \frac{Q^2}{5}, \quad R'(Q) = 10 - \frac{2Q}{5}, \quad R'(15) = 10 - \frac{2}{5} \times 15 = 4.$$

$$3. \text{ 解 } (1) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{1 - 2\sin x}{\cos 3x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{-2\cos x}{-3\sin 3x} = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \tan 5x}{\ln \tan 3x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{5 \sec^2 5x}{\tan 5x}}{\frac{3 \sec^2 3x}{\tan 3x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{5 \cdot 3x}{3 \cdot 5x} = 1;$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \cdot \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0;$$

$$(4) \text{ 令 } y = x^x, \text{ 则 } \ln y = x \ln x. \text{ 因为 } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \xrightarrow{\frac{\infty}{\infty} \text{ 型}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0, \text{ 所以原式} = e^0 = 1;$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 2^x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 2^x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x + 2^x \ln 2}{x^2 + 2^x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 2^x \ln 2}{x^2 + 2^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + 2^x \ln 2}{2x + 2^x \ln 2} \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x \ln^2 2}{2 + 2^x \ln^2 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x \ln^4 2}{2^x \ln^3 2} = e^{\ln 2} = 2.$$

$$4. \text{ 证明 } (1) f'(x) = \frac{x^2 - 2x - a - b}{(x-1)^2} = 1 - \frac{a+b+1}{(x-1)^2}, \text{ 故当 } a+b+1 > 0 \text{ 时, } f'(x) = 0 \text{ 有解 } x =$$



$1 \pm \sqrt{a+b+1}$ .

当  $x < 1 - \sqrt{a+b+1}$  时,  $f'(x) > 0$ , 从而  $f(x)$  单增; 当  $1 - \sqrt{a+b+1} < x < 1 + \sqrt{a+b+1}$  时,  $f'(x) < 0$ , 则  $f(x)$  单减; 当  $x > 1 + \sqrt{a+b+1}$  时,  $f'(x) > 0$ , 则  $f(x)$  单增. 故  $f(x)$  在  $x = 1 - \sqrt{a+b+1}$  处取得极大值.

(2)  $f(x)$  在  $[a, c]$  及  $[c, b]$  上都满足拉格朗日定理条件, 则存在  $\alpha \in (a, c), \beta \in (c, b)$ , 使得

$$f'(\alpha) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a} = \frac{f(c)}{c - a}, \quad f'(\beta) = \frac{f(b) - f(c)}{b - c} = -\frac{f(c)}{b - c}.$$

因为  $f(c) > 0$ , 则  $f'(\alpha) > 0, f'(\beta) < 0$ .

因  $f(x)$  在  $(a, b)$  内二阶可导, 则  $f'(x)$  在  $[\alpha, \beta]$  上满足拉格朗日定理条件, 故至少存在一点  $\xi \in (\alpha, \beta)$ , 使  $f''(\xi) = \frac{f'(\beta) - f'(\alpha)}{\beta - \alpha} < 0$ .

(3) 设  $f(x) = \tan x - x - \frac{1}{3}x^3$ , 则,

$$f'(x) = \sec^2 x - 1 - x^2 = \tan^2 x - x^2 = (\tan x - x)(\tan x + x), \text{ 当 } 0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ 时, } \tan x + x > 0.$$

设  $g(x) = \tan x - x$ , 则  $g'(x) = \sec^2 x - 1 = \tan^2 x > 0$ ,  $g(x)$  在  $(0, \frac{\pi}{2})$  内单调增加, 所以  $g(x) > g(0) = 0$ , 从而  $f'(x) > 0$ ,  $f(x)$  在  $(0, \frac{\pi}{2})$  内单调增加,  $f(x) > f(0) = 0$  即  $\tan x > x + \frac{1}{3}x^3$ .

5. 解 令  $y' = 6x^2 - 12x - 18 = 0$ , 得驻点  $x = -1, x = 3$ . 令  $y'' = 12x - 12 = 0$ , 得  $x = 1$ .

$x$	$(-\infty, -1)$	$-1$	$(-1, 1)$	$1$	$(1, 3)$	$3$	$(3, +\infty)$
$y'$	+	0	-	-	-	0	+
$y''$	-	-	-	0	+	+	+
$y$	增、凸	极大	减、凸	拐点	减、凹	极小	增、凹

极大值为  $y(-1) = 17$ , 极小值为  $y(3) = -47$ , 拐点为  $(1, 15)$ .

6. 解 (1)  $C(P) = 5Q + 200 = 5(100 - 2P) + 200 = 700 - 10P$ ,

$$R(P) = QP = (100 - 2P)P = 100P - 2P^2.$$

(2)  $L(P) = QP - C(P) = (100 - 2P)P - (700 - 10P) = 110P - 2P^2 - 700$ ,

$$L'(P) = 110 - 4P. \text{ 令 } L'(P) = 0, \text{ 得 } P = 27.5.$$

又  $L''(P) = -4 < 0$ , 故当  $P = 27.5, Q = 45$  时获得总利润最大.

## 4.1 大纲要求及重点内容

### 1. 大纲要求

- (1) 理解原函数与不定积分的概念;
- (2) 会灵活运用不定积分的性质及基本积分公式求不定积分;
- (3) 会灵活运用第一类换元积分法求不定积分, 会用第二类换元积分法求被积函数含有根式的不定积分;
- (4) 会灵活运用分部积分法求不定积分;
- (5) 会计算简单有理函数的不定积分.

### 2. 重点内容

原函数与不定积分的概念; 不定积分的换元积分法和分部积分法.

## 4.2 内容精要

### 1. 原函数概念

若在某区间  $I$  上可导函数  $F(x)$  的导函数为  $f(x)$ , 即对每一  $x \in I$ , 都有  $F'(x) = f(x)$  或  $dF(x) = f(x)dx$ , 则函数  $F(x)$  称为  $f(x)$  在该区间上的一个原函数.

### 2. 不定积分概念

在区间  $I$  上,  $f(x)$  的所有原函数称为函数  $f(x)$  在区间  $I$  上的不定积分, 记作  $\int f(x)dx$ .

若  $F(x)$  是  $f(x)$  在区间  $I$  上的一个原函数, 则  $\int f(x)dx = F(x) + C$ , 其中  $C$  为任意常数.

### 3. 基本积分公式

- |  |   |
|--|---|
| (1) $\int kdx = kx + C$ ( $k$ 为常数);                    | (2) $\int x^\mu dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C$ ( $\mu \neq -1$ );  |
| (3) $\int \frac{dx}{x} = \ln x  + C$ ;                 | (4) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$ ;                       |
| (5) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$ ; | (6) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ ( $a > 0$ , 且 $a \neq 1$ ); |



$$(7) \int e^x dx = e^x + C;$$

$$(8) \int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$(9) \int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$(10) \int \sec^2 x dx = \tan x + C;$$

$$(11) \int \csc^2 x dx = -\cot x + C;$$

$$(12) \int \sec x \tan x dx = \sec x + C;$$

$$(13) \int \csc x \cot x dx = -\csc x + C.$$

#### 4. 不定积分的性质

性质1  $\frac{d}{dx} \left[ \int f(x) dx \right] = f(x)$  或  $d \left[ \int f(x) dx \right] = f(x) dx$ .

性质2  $\int F'(x) dx = F(x) + C$  或  $\int dF(x) = F(x) + C$ .

性质3 两个函数代数和的不定积分, 等于它们各自不定积分的代数和, 即

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

注 此性质可推广到有限多个函数之和的情形.

性质4 非零常数因子可提到积分号前面, 即

$$\int kf(x) dx = k \int f(x) dx \quad (k \neq 0).$$

#### 5. 求不定积分的基本方法

(1) 第一类换元积分法(凑微分法)

$\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx \xrightarrow[u = \varphi(x)]{du = \varphi'(x) dx} \int f(u) du$ , 后一积分对  $u$  来说容易积分.

(2) 第二类换元积分法  $\int f(x) dx \xrightarrow[x = \phi(t)]{dx = \phi'(t) dt} \int f[\phi(t)] \phi'(t) dt$ .

① 三角代换 被积函数中含有  $\sqrt{a^2 - x^2}$  时, 设  $x = a \sin t$ ; 被积函数中含有  $\sqrt{a^2 + x^2}$  时, 设  $x = a \tan t$ ; 被积函数中含有  $\sqrt{x^2 - a^2}$  时, 设  $x = a \sec t$ .

② 倒代换 如  $\int \frac{dx}{x(x^2 + 2)}$ , 设  $x = \frac{1}{t}$ .

③ 指数代换 如  $\int \frac{2^x dx}{1 + 2^x + 4^x}$ , 设  $2^x = t$ .

④ 简单无理函数 如  $\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx$ , 设  $x = t^6$ .

(3) 分部积分法

$\int u dv = uv - \int v du$ , 关键的问题是如何把被积函数分成两部分, 分成的两部分应满足:

$v = \int dv$  必须能求出; 第二个积分比原积分容易求.

典型的分部积分类型如  $\int x^n \cos x dx$ ,  $\int x^n e^x dx$ ,  $\int x^n \ln x dx$ ,  $\int x \arcsin x dx$ ,  $\int x^2 \arctan x dx$ ,

$\int e^x \cos x dx$  属于循环积分.

## (4) 有理函数的积分

任何一个有理假分式都可以化为多项式与有理真分式的和. 又因为多项式的积分很容易, 所以, 可以将有理函数的不定积分转化为有理真分式的积分问题.

理论上已证明, 任何真分式总能分解为部分分式和, 分解方法如下:

设  $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$  为真分式, 多项式  $Q(x)$  总能在实数范围内分解为一次因式和二次真因式的乘积, 不妨设

$$Q(x) = b_0 (x-a)^k \cdots (x^2+px+q)^m \cdots,$$

其中  $p^2 - 4q < 0, \dots$ . 于是真分式  $R(x)$  必能分解为如下形式的部分分式之和:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^k} + \frac{A_2}{(x-a)^{k-1}} + \cdots + \frac{A_k}{(x-a)} + \cdots + \frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^m} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{m-1}} + \cdots + \frac{M_mx+N_m}{(x^2+px+q)} + \cdots,$$

其中诸函数中  $A_1, A_2, \dots, A_k; M_1, M_2, \dots, M_m; N_1, N_2, \dots, N_m$  等在具体问题中用待定系数法求出.

一般地, 求有理真分式的不定积分的步骤是:

- ① 将有理真分式分解为部分分式和;
- ② 求出各部分分式的原函数.

## 4.3 题型总结与典型例题

### 题型 4-1 关于不定积分与原函数的概念

**【解题思路】** 本章最重要的两个概念是不定积分与原函数, 正确理解不定积分与原函数的定义, 是解决本题型的关键.

**例 4.1** 设函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续, 则  $d\left[\int f(x)dx\right]$  等于( ).

- A.  $f(x)$                       B.  $f(x)dx$                       C.  $f(x)+C$                       D.  $f'(x)dx$

**解** 设  $F'(x)=f(x)$ , 则  $d\left[\int f(x)dx\right] = d[F(x)+C] = f(x)dx$ , 故选 B.

**注**  $d$  与  $\int$  是互逆的运算符号, 相遇时则互相抵消. 不过当  $\int$  在  $d$  之前时, 相抵消后要加  $C$ , 如  $\int dx = x + C$ .

**例 4.2** 已知  $f(x)$  的一个原函数为  $\cos x$ ,  $g(x)$  的一个原函数为  $x^2$ , 下列哪些是复合函数  $f[g(x)]$  的原函数( ).

- A.  $x^2$                       B.  $\cos^2 x$                       C.  $\cos x^2$                       D.  $\cos x$

**解** 先求  $f[g(x)]$ , 由题意得

$$f(x) = (\cos x)' = -\sin x, g(x) = (x^2)' = 2x, \text{ 所以 } f[g(x)] = -\sin 2x.$$

将所给的四个函数逐个求导, 只有  $(\cos^2 x)' = -2\cos x \sin x = -\sin 2x$ , 所以只有  $\cos^2 x$  为  $f[g(x)] = -\sin 2x$  的一个原函数, 故选 B.



**例 4.3** 设  $F(x)$  是  $f(x)$  的一个原函数, 则  $F(x)$  为偶函数是  $f(x)$  为奇函数的( ).

A. 必要条件      B. 充分条件      C. 充要条件      D. 无关条件

**解** 充分性 因为  $F'(x) = f(x)$ , 若  $F(x)$  为偶函数, 则  $f(x) = F'(x) = -F'(-x) = -f(-x)$ , 即  $f(-x) = -f(x)$ ,  $f(x)$  为奇函数.

必要性 若  $f(x)$  为奇函数, 又  $\int f(x)dx = F(x) + C$ , 所以  $F(x)$  为偶函数. 故选 C.

**例 4.4** 已知  $F'(x) = \frac{1+x}{1+\sqrt[3]{x}}$ , 且  $F(0) = 1$ , 求  $F(x)$ .

**解** 根据题设条件, 有

$$\begin{aligned} F(x) &= \int F'(x)dx = \int \frac{1+x}{1+\sqrt[3]{x}}dx = \int (1 - \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})dx \\ &= \int 1dx - \int \sqrt[3]{x}dx + \int \sqrt[3]{x^2}dx = x - \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + C. \end{aligned}$$

又  $F(0) = 1$ , 得  $C = 1$ . 所以  $F(x) = x - \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + 1$ .

#### 题型 4-2 分项积分法

**【解题思路】** 通常把一个复杂的函数分解成  $n$  个简单函数之和, 例如:  $f(x) = k_1g_1(x) + k_2g_2(x)$ , 若能求出右端两个函数  $g_1(x)$  和  $g_2(x)$  的积分, 则应用不定积分的基本性质  $\int f(x)dx = k_1 \int g_1(x)dx + k_2 \int g_2(x)dx$  就可以求出函数  $f(x)$  的不定积分.

**例 4.5** 求下列不定积分:

$$(1) \int \frac{1+3x^2}{1+x^2}dx; \quad (2) \int \frac{(x+1)^2}{x(x^2+1)}dx; \quad (3) \int \frac{1}{\sin^2x \cos^2x}dx; \quad (4) \int \frac{2^x + e^x}{2^x e^x}dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad (1) \int \frac{1+3x^2}{1+x^2}dx &= \int \frac{-2+3(1+x^2)}{1+x^2}dx = -2 \int \frac{1}{1+x^2}dx + 3 \int dx \\ &= -2\arctan x + 3x + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \int \frac{(x+1)^2}{x(x^2+1)}dx &= \int \frac{x^2+1+2x}{x(x^2+1)}dx = \int \left( \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2+1} \right)dx \\ &= \ln|x| + 2\arctan x + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \int \frac{1}{\sin^2x \cos^2x}dx &= \int \frac{\sin^2x + \cos^2x}{\sin^2x \cdot \cos^2x}dx = \int \left( \frac{1}{\cos^2x} + \frac{1}{\sin^2x} \right)dx \\ &= \int \frac{1}{\cos^2x}dx + \int \frac{1}{\sin^2x}dx = \tan x - \cot x + C. \end{aligned}$$

$$(4) \int \frac{2^x + e^x}{2^x e^x}dx = \int (e^{-1})^x dx + \int (2^{-1})^x dx = \frac{e^{-x}}{\ln e^{-1}} + \frac{2^{-x}}{\ln 2^{-1}} + C = -\frac{1}{e^x} - \frac{1}{2^x \ln 2} + C.$$

#### 题型 4-3 第一类换元积分法(凑微分法)

**【解题思路】** 第一类换元积分法又称凑微分法, 解题关键需在被积分函数中“凑”出一部分微分, 即“凑微分法”, 由于这种方法灵活多变, 因此是不定积分法中较难掌握的方法, 在熟记常用公式的前提下, 应多熟悉一些常用类型及其变化. 凑微分法是不定积分法中最重要的一种方法也是最难掌握的一种方法.

例 4.6 求下列不定积分:

$$\begin{aligned} (1) \int e^{e^x+x} dx; \quad (2) \int x(1+x^2)^{100} dx; \quad (3) \int \frac{\sqrt{1+2\arctan x}}{1+x^2} dx; \\ (4) \int \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^5} dx; \quad (5) \int \frac{dx}{\sin 2x + 2\sin x}; \quad (6) \int (x \ln x)^{\frac{3}{2}} (\ln x + 1) dx. \end{aligned}$$

解 (1)  $\int e^{e^x+x} dx = \int e^{e^x} e^x dx = \int e^{e^x} de^x = e^{e^x} + C.$

(2)  $\int x(1+x^2)^{100} dx = \frac{1}{2} \int (1+x^2)^{100} d(1+x^2) = \frac{1}{202} (1+x^2)^{101} + C.$

(3)  $\int \frac{\sqrt{1+2\arctan x}}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int (1+2\arctan x)^{\frac{1}{2}} d(1+2\arctan x)$   
 $= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} (1+2\arctan x)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3} (1+2\arctan x)^{\frac{3}{2}} + C.$

(4)  $\int \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^5} dx = \int (\cos x + \sin x)^{-5} d(\cos x + \sin x) = \frac{1}{4} (\cos x + \sin x)^{-4} + C.$

(5)  $\int \frac{dx}{\sin 2x + 2\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin x \cos x + 2\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin x (1 + \cos x)} = \int \frac{dx}{8\sin \frac{x}{2} \cos^3 \frac{x}{2}}$   
 $= \int \frac{\sec^2 \frac{x}{2} d\tan \frac{x}{2}}{4\tan \frac{x}{2}} = \frac{1}{4} \int \left( \tan \frac{x}{2} + \frac{1}{\tan \frac{x}{2}} \right) d\tan \frac{x}{2}$   
 $= \frac{1}{4} \left( \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + \frac{1}{2} \tan^2 \frac{x}{2} \right) + C.$

(6)  $\int (x \ln x)^{\frac{3}{2}} (\ln x + 1) dx = \int (x \ln x)^{\frac{3}{2}} d(x \ln x) = \frac{2}{5} (x \ln x)^{\frac{5}{2}} + C.$

#### 题型 4-4 第二类换元积分法

【解题思路】 第一类换元积分法, 实际上是作变量代换  $\varphi(x)=t$ , 只是因为  $\varphi(x)$  隐含在被积函数中, 所以较难掌握; 而第二类换元积分法是作变量代换  $x=\varphi(t)$ , 就较容易掌握, 常见的变量代换有: 三角代换、倒代换、无理函数的代换, 换元积分法得到的结果必须代回原变量这一点很重要.

例 4.7 求下列不定积分:

$$\begin{aligned} (1) \int \frac{x dx}{(x^2+3)\sqrt{1-x^2}}; \quad (2) \int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}; \\ (3) \int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}; \quad (4) \int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4} dx. \end{aligned}$$

解 (1) 被积函数含  $\sqrt{1-x^2}$ , 于是设  $x=\sin t$ , 则  $dx=\cos t dt$ , 故

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \frac{\sin t \cos t dt}{(\sin^2 t + 3) \cos t} = \int \frac{\sin t dt}{\sin^2 t + 3} = - \int \frac{d \cos t}{4 - \cos^2 t} \\ &= - \frac{1}{4} \int \left( \frac{1}{2 - \cos t} + \frac{1}{2 + \cos t} \right) d \cos t = - \frac{1}{4} \ln \left| \frac{2 + \cos t}{2 - \cos t} \right| + C \\ &= - \frac{1}{4} \ln \left| \frac{2 + \sqrt{1-x^2}}{2 - \sqrt{1-x^2}} \right| + C. \end{aligned}$$



(2) 被积函数含  $\sqrt{1+x^2}$ , 于是设  $x = \tan t$ , 则  $dx = \sec^2 t dt$   $\left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right)$ , 故

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int \frac{\sec^2 t}{\tan^4 t \sec t} dt = \int \frac{\cos^3 t}{\sin^4 t} dt = \int \frac{\cos^2 t}{\sin^4 t} d\sin t = \int \frac{1 - \sin^2 t}{\sin^4 t} d\sin t \\ &= \int \left( \frac{1}{\sin^4 t} - \frac{1}{\sin^2 t} \right) d\sin t = -\frac{1}{3} \frac{1}{\sin^3 t} + \frac{1}{\sin t} + C = -\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C.\end{aligned}$$

(3) 原式  $\int \frac{d(x+1)}{1 + \sqrt{(x+1)^2 + 1}}$ . 设  $x+1 = \tan t$ , 则  $d(x+1) = \sec^2 t dt$   $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ , 于是

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int \frac{\sec^2 t dt}{1 + \sec t} = \int \frac{dt}{\cos t (1 + \cos t)} = \int \frac{dt}{\cos t} - \int \frac{1}{1 + \cos t} dt \\ &= \int \sec t dt - \int \frac{1}{\sin^2 t} dt + \int \frac{\cos t}{\sin^2 t} dt = \ln |\sec t + \tan t| + \cot t - \frac{1}{\sin t} + C \\ &= \ln |\sqrt{x^2 + 2x + 2} + x + 1| + \frac{1}{x+1} - \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}{x+1} + C.\end{aligned}$$

(4) 设  $x = 3\sec t$ , 则  $dx = 3\sec t \tan t dt$ , 于是

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int \frac{3\tan t}{3^4 \sec^4 t} 3\sec t \tan t dt = \frac{1}{9} \int \sin^2 t \cos t dt = \frac{1}{9} \int \sin^2 t d\sin t = \frac{1}{27} \sin^3 t + C \\ &= \frac{1}{27} \left( \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x} \right)^3 + C.\end{aligned}$$

**例 4.8** 求不定积分  $\int \frac{dx}{x^8(1+x^2)}$ .

**解** 设  $x = \frac{1}{t}$ , 则  $dx = -\frac{1}{t^2} dt$ , 于是

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int \frac{-\frac{1}{t^2} dt}{\frac{1}{t^8} \left(1 + \frac{1}{t^2}\right)} = -\int \frac{t^8}{t^2 + 1} dt = -\int \frac{t^8 - 1 + 1}{t^2 + 1} dt \\ &= -\int (t^2 - 1)(t^4 + 1) dt - \int \frac{1}{t^2 + 1} dt \\ &= -\frac{1}{7} t^7 + \frac{1}{5} t^5 - \frac{1}{3} t^3 + t - \arctan t + C \\ &= -\frac{1}{7x^7} + \frac{1}{5x^5} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{x} - \arctan \frac{1}{x} + C.\end{aligned}$$

**注** 本题是利用倒代换的换元积分法. 该方法一般适用于被积函数的分子或分母含  $x$  的高次幂的情形. 设  $m, n$  分别为被积函数的分子、分母关于  $x$  的最高次数, 当  $n-m > 1$  时, 利用倒代换的换元积分法.

例 4.7, 例 4.8 为三角代换、倒代换的第二类换元积分, 无理函数的代换的换元积分法在后面有题型.

#### 题型 4-5 分部积分法

**【解题思路】** 分部积分公式  $\int u(x) dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x) du(x)$  或  $\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x) dx$ , 运用分部积分法的关键是如何选取  $u(x), dv(x)$ . 利用分部积分

公式应注意两点: ①  $v$  要容易求出; ②  $\int vdu$  要比  $\int u dv$  容易计算.

例 4.9 求下列不定积分:

$$(1) \int x^2 \sin^2 x dx;$$

$$(2) \int \frac{(x+1)e^x}{(x+2)^2} dx;$$

$$(3) \int e^{-x} \arctan e^x dx;$$

$$(4) \int \frac{xe^x}{(e^x+1)^2} dx.$$

$$\text{解 } (1) \int x^2 \sin^2 x dx = \int x^2 \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int x^2 dx - \frac{1}{2} \int x^2 \cos 2x dx$$

$$= \frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{2} \left( x^2 \cdot \frac{\sin 2x}{2} - \int 2x \cdot \frac{\sin 2x}{2} dx \right)$$

$$= \frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{4} x^2 \sin 2x + \frac{1}{2} \left[ x \cdot \left( -\frac{\cos 2x}{2} \right) + \int \frac{\cos 2x}{2} dx \right]$$

$$= \frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{4} x^2 \sin 2x - \frac{1}{4} x \cos 2x + \frac{1}{8} \sin 2x + C.$$

$$(2) \int \frac{(x+1)e^x}{(x+2)^2} dx = \int (x+1)e^x d\left(\frac{1}{x+2}\right) = -\frac{(x+1)e^x}{x+2} + \int e^x dx$$

$$= -\frac{x+1}{x+2} e^x + e^x + C = -\frac{1}{x+2} e^x + C.$$

$$(3) \int e^{-x} \arctan e^x dx = \int \arctan e^x d(-e^{-x}) = -\arctan e^x \cdot e^{-x} + \int \frac{e^{-x}}{1+e^{2x}} \cdot e^x dx$$

$$= -\arctan e^x \cdot e^{-x} + \int \frac{e^{-2x}}{1+e^{-2x}} \cdot dx$$

$$= -\arctan e^x \cdot e^{-x} - \frac{1}{2} \ln(1+e^{-2x}) + C.$$

$$(4) \int \frac{xe^x}{(e^x+1)^2} dx = \int \frac{x d(e^x+1)}{(e^x+1)^2} = -\int x d\left(\frac{1}{e^x+1}\right)$$

$$= -\frac{x}{e^x+1} + \int \frac{e^x}{e^x(e^x+1)} dx = -\frac{x}{e^x+1} + \int \left(\frac{1}{e^x} - \frac{1}{e^x+1}\right) d(e^x)$$

$$= -\frac{x}{e^x+1} + \ln e^x - \ln(e^x+1) + C = \frac{xe^x}{e^x+1} - \ln(e^x+1) + C.$$

例 4.10 若  $f(x)$  的一个原函数是  $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ , 求  $\int xf'(x)dx$ .

解  $f(x)$  的一个原函数是  $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ , 则  $f(x) = [\ln(x+\sqrt{1+x^2})]' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ ,

$$\text{于是 } \int xf'(x)dx = xf(x) - \int f(x)dx = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \ln(x+\sqrt{1+x^2}) + C.$$

例 4.11 设  $f(x)$  的一个原函数是  $x \ln x$ , 则  $\int xf(x)dx = (\quad)$ .

A.  $x^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \ln x \right) + C$

B.  $x^2 \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln x \right) + C$

C.  $x^2 \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \ln x \right) + C$

D.  $x^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \ln x \right) + C$



解  $f(x)$  的一个原函数是  $x \ln x$ , 则  $f(x) = (x \ln x)' = \ln x + 1$ , 于是

$$\begin{aligned} \int x f(x) dx &= \int x(\ln x + 1) dx = \int x \ln x dx + \int x dx = \int \ln x d\left(\frac{x^2}{2}\right) + \int x dx \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{2} + C = \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{x^2}{4} + C. \end{aligned}$$

故选 B.

#### 题型 4-6 有理函数的积分

【解题思路】 关于有理函数的积分, 假分式可以分解为多项式与真分式的和, 真分式可以分解为部分分式之和, 最简真分式的形式只有四种:

$$\frac{1}{x-a}, \quad \frac{1}{(x-a)^n}, \quad \frac{Mx+N}{x^2+px+q}, \quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n} \quad (n=2,3,\dots, p^2-4q < 0),$$

例 4.12 求下列不定积分:

$$(1) \int \frac{dx}{(x^2+1)(x+1)^2};$$

$$(2) \int \frac{x^2+1}{x^4+1} dx;$$

$$(3) \int \frac{3x-2}{x^2-4x+5} dx;$$

$$(4) \int \frac{1}{x(x^6+4)} dx.$$

解 (1) 设  $\frac{1}{(x^2+1)(x+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{D}{x+1}$ , 通分并比较等式两边得

$$\begin{aligned} &(Ax+B)(x+1)^2 + C(x^2+1) + D(x+1)(x^2+1) \\ &= (A+D)x^3 + (2A+B+C+D)x^2 + (A+2B+D)x + B+C+D = 1, \end{aligned}$$

$$\text{即} \begin{cases} A+D=0, \\ 2A+B+C+D=0, \\ A+2B+D=0, \\ B+C+D=1, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} A=-\frac{1}{2}, \\ B=0, \\ C=\frac{1}{2}, \\ D=\frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{于是} \int \frac{1}{(x^2+1)(x+1)^2} dx &= -\frac{1}{2} \int \frac{x}{x^2+1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x+1)^2} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1} \\ &= -\frac{1}{4} \ln(x^2+1) - \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2} \ln|x+1| + C. \end{aligned}$$

(2) 方法一 因为  $x^4+1 = (x^2+1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 = (x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$ , 所以设  $\frac{x^2+1}{x^4+1} = \frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1}$ , 解得  $A=0, B=\frac{1}{2}, C=0, D=\frac{1}{2}$ , 于是

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+1}{x^4+1} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} dx \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan(\sqrt{2}x+1) + \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan(\sqrt{2}x-1) + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{方法二} \quad \int \frac{x^2+1}{x^4+1} dx &= \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}} dx = \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2} dx = \int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2} d\left(x-\frac{1}{x}\right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x^2-1}{\sqrt{2}x} + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \int \frac{3x-2}{x^2-4x+5} dx &= \frac{3}{2} \int \frac{2x-4}{x^2-4x+5} dx + 4 \int \frac{dx}{x^2-4x+5} \\
 &= \frac{3}{2} \int \frac{d(x^2-4x+5)}{x^2-4x+5} + 4 \int \frac{d(x-2)}{(x-2)^2+1} \\
 &= \frac{3}{2} \ln(x^2-4x+5) + 4 \arctan(x-2) + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad \text{方法一} \quad \int \frac{1}{x(x^6+4)} dx &= \int \frac{x^5}{x^6(x^6+4)} dx = \frac{1}{6} \int \frac{1}{x^6(x^6+4)} dx^6 \\
 &= \frac{1}{6} \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{1}{x^6} - \frac{1}{x^6+4} \right) dx^6 \right] \\
 &= \frac{1}{24} [\ln x^6 - \ln(x^6+4)] + C = \frac{1}{24} \ln \frac{x^6}{x^6+4} + C.
 \end{aligned}$$

方法二 设  $x = \frac{1}{t}$ , 则  $dx = -\frac{1}{t^2} dt$ , 于是

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{x(x^6+4)} dx &= \int \frac{1}{\frac{1}{t} \left( \frac{1}{t^6} + 4 \right)} \left( -\frac{1}{t^2} \right) dt = \int \frac{-t^5}{1+4t^6} dt \\
 &= -\frac{1}{24} \int \frac{1}{1+4t^6} d(1+4t^6) = -\frac{1}{24} \ln(1+4t^6) + C \\
 &= -\frac{1}{24} \ln \left( 1 + \frac{4}{x^6} \right) + C = \frac{1}{24} \ln \frac{x^6}{x^6+4} + C.
 \end{aligned}$$

#### 题型 4-7 简单无理函数的积分

**【解题思路】** 求简单无理函数的积分的关键是运用变量代换, 或分子、分母有理化, 把根号去掉, 从而化为有理函数的积分. 为此, 可以通过对被积函数的变形或根据被积表达式的特点, 灵活地选择变量来达到目的.

**例 4.13** 求下列不定积分:

$$(1) \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[4]{x})^3}; \quad (2) \int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1+x}{x}} dx; \quad (3) \int \frac{\ln x}{\sqrt{3x-2}} dx.$$

**解** (1) 被积函数含有两个根式  $\sqrt{x}$  与  $\sqrt[4]{x}$ , 为了能同时消去这两个根式, 令  $\sqrt[4]{x} = t$ , 即设  $\sqrt{x} = t$ , 则  $x = t^4$ ,  $dx = 4t^3 dt$ , 于是

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[4]{x})^3} &= \int \frac{4t^3 dt}{t^2(1+t)^3} = 4 \int \frac{t}{(1+t)^3} dt \\
 &= 4 \int \frac{1}{(1+t)^2} dt - 4 \int \frac{1}{(1+t)^3} dt \\
 &= -\frac{4}{1+t} + \frac{4}{2(1+t)^2} + C
 \end{aligned}$$



$$\frac{2}{(1+\sqrt[4]{x})^2} - \frac{4}{1+\sqrt[4]{x}} + C.$$

(2) 设  $\sqrt{\frac{1+x}{x}} = t$ , 则  $x = \frac{1}{t^2-1}$ ,  $dx = -\frac{2t}{(t^2-1)^2} dt$ , 于是

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1+x}{x}} dx &= \int (t^2-1)t \frac{-2t}{(t^2-1)^2} dt = -2 \int \frac{t^2}{t^2-1} dt = -2 \int \left(1 + \frac{1}{t^2-1}\right) dt \\ &= 2t - \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = -2 \sqrt{\frac{1+x}{x}} - \ln \left| x \left( \sqrt{\frac{1+x}{x}} - 1 \right)^2 \right| + C. \end{aligned}$$

(3) 令  $\sqrt{3x-2} = t$ , 即  $x = \frac{1}{3}(t^2+2)$ , 则  $dx = \frac{2}{3}t dt$ , 于是

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln x}{\sqrt{3x-2}} dx &= \int \frac{\ln \frac{1}{3}(t^2+2)}{t} \cdot \frac{2}{3} t dt = \frac{2}{3} \int \ln \frac{t^2+2}{3} dt \\ &= \frac{2}{3} \left( t \ln \frac{t^2+2}{3} - \int t \cdot \frac{3}{t^2+2} \cdot \frac{2t}{3} dt \right) \\ &= \frac{2}{3} \left( t \ln \frac{t^2+2}{3} - 2 \int \frac{t^2}{t^2+2} dt \right) \\ &= \frac{2}{3} \left( t \ln \frac{t^2+2}{3} - 2t + 2\sqrt{2} \arctan \frac{t}{\sqrt{2}} \right) + C \\ &= \frac{2}{3} \left[ (\ln x - 2) \sqrt{3x-2} + \frac{4\sqrt{2}}{3} \arctan \frac{\sqrt{3x-2}}{\sqrt{2}} \right] + C. \end{aligned}$$

**注** 若被积函数含有  $\sqrt[n]{ax+b}$  形式, 可令  $\sqrt[n]{ax+b} = t$ , 即  $x = \frac{1}{a}(t^n - b)$ ; 对被积函数含有  $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$  的简单无理函数, 可令  $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$ , 即  $x = \frac{b-dt^n}{ct^n-a}$ . 尽管一些被积函数中所含根式的形式与上面介绍的有所不同, 但也能通过变量替换将根式去掉. 如下面例 4.14 中可令  $\sqrt{e^x-2} = t$ , 即  $x = \ln(2+t^2)$ .

**例 4.14** 求  $\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-2}} dx (x > 1)$ .

**解**  $\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-2}} dx = 2 \int x d\sqrt{e^x-2} = 2x\sqrt{e^x-2} - 2 \int \sqrt{e^x-2} dx.$

令  $\sqrt{e^x-2} = t$ , 即  $x = \ln(2+t^2)$ , 则  $dx = \frac{1}{2+t^2} 2t dt$ , 于是

$$\begin{aligned} \int \sqrt{e^x-2} dx &= \int t \frac{2t}{2+t^2} dt = 2 \int \frac{t^2+2-2}{2+t^2} dt = 2 \int \left(1 - \frac{2}{2+t^2}\right) dt \\ &= 2t - 2\sqrt{2} \arctan \frac{t}{\sqrt{2}} + C_1 \\ &= 2\sqrt{e^x-2} - 2\sqrt{2} \arctan \sqrt{\frac{e^x}{2}-1} + C_1. \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= 2x \sqrt{e^x - 2} - 2 \left( 2 \sqrt{e^x - 2} - 2\sqrt{2} \arctan \sqrt{\frac{e^x}{2} - 1} \right) + C \\
 &= 2(x-2) \sqrt{e^x - 2} + 4\sqrt{2} \arctan \sqrt{\frac{e^x}{2} - 1} + C. \quad (C = 2C_1)
 \end{aligned}$$

#### 题型 4-8 三角有理式积分

**【解题思路】** 对三角有理式积分, 可通过万能置换公式  $\tan \frac{x}{2} = t, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ , 化为有理函数的积分, 或设  $\tan x = t$ , 也有直接凑微分的形式. 在一般情况下哪种方法简单就用哪种.

**例 4.15** 求下列不定积分:

$$(1) \int \frac{dx}{\cos x + 2\sin x + 3}; \quad (2) \int \frac{3\sin x + 2\cos x}{2\sin x + 3\cos x} dx; \quad (3) \int \frac{dx}{(2 + \cos x)\sin x}.$$

**解** (1) 设  $\tan \frac{x}{2} = t$ , 即  $x = 2\arctan t$ , 则  $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$ , 于是

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{\cos x + 2\sin x + 3} &= \int \frac{\frac{2}{1+t^2} dt}{\frac{1-t^2}{1+t^2} + 2 \cdot \frac{2t}{1+t^2} + 3} = \int \frac{dt}{t^2 + 2t + 2} = \int \frac{d(t+1)}{(t+1)^2 + 1} \\
 &= \arctan(t+1) + C = \arctan\left(\tan \frac{x}{2} + 1\right) + C.
 \end{aligned}$$

(2) 设  $3\sin x + 2\cos x = \alpha(2\sin x + 3\cos x) + \beta(2\sin x + 3\cos x)'$ , 由此得  $2\alpha - 3\beta = 3, 3\alpha + 2\beta = 2$ , 解出  $\alpha = \frac{12}{13}, \beta = -\frac{5}{13}$ , 于是

$$\begin{aligned}
 \int \frac{3\sin x + 2\cos x}{2\sin x + 3\cos x} dx &= \frac{12}{13} \int dx - \frac{5}{13} \int \frac{(2\sin x + 3\cos x)'}{2\sin x + 3\cos x} dx \\
 &= \frac{12}{13}x - \frac{5}{13} \ln |2\sin x + 3\cos x| + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \int \frac{dx}{(2 + \cos x)\sin x} &= \int \frac{\sin x dx}{(2 + \cos x)\sin^2 x} = - \int \frac{d\cos x}{(2 + \cos x)(1 + \cos x)(1 - \cos x)} \\
 &= \int \left( \frac{\frac{1}{3}}{2 + \cos x} - \frac{\frac{1}{2}}{1 + \cos x} - \frac{\frac{1}{6}}{1 - \cos x} \right) d\cos x \\
 &= \frac{1}{3} \ln |2 + \cos x| - \frac{1}{2} \ln |1 + \cos x| + \frac{1}{6} \ln |1 - \cos x| + C.
 \end{aligned}$$

#### 题型 4-9 分段函数的不定积分

**【解题思路】** 分段函数如果是可积函数, 那么原函数是连续的, 分别求出各区间段上的不定积分表达式, 由原函数连续性, 调整各积分常数的关系, 使原函数在分界点处连续.

**例 4.16** 设  $f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ x+1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2x, & x > 1, \end{cases}$  求  $\int f(x) dx$ .



$$\text{解 } \int f(x) dx = \begin{cases} x + C_1, & x < 0, \\ \frac{x^2}{2} + x + C_2, & 0 \leq x \leq 1, \\ x^2 + C_3, & x > 1. \end{cases}$$

因为  $f(x)$  在  $x=0, x=1$  处均连续, 故原函数也连续, 所以得

$$0 + C_1 = 0 + C_2, \quad \frac{1}{2} + 1 + C_2 = 1 + C_3.$$

于是取  $C_1 = C$ , 则  $C_2 = C, C_3 = \frac{1}{2} + C$ . 故

$$\int f(x) dx = \begin{cases} x + C, & x < 0, \\ \frac{x^2}{2} + x + C, & 0 \leq x \leq 1, \\ x^2 + \frac{1}{2} + C, & x > 1. \end{cases}$$

例 4.17 求  $\int \max\{1, x^2\} dx$ .

$$\text{解 } \text{因为 } \max\{1, x^2\} = \begin{cases} x^2, & x < -1, \\ 1, & -1 \leq x \leq 1, \\ x^2, & x > 1, \end{cases} \text{ 所以}$$

$$g(x) = \int \max\{1, x^2\} dx = \begin{cases} \frac{x^3}{3} + C_1, & x < -1, \\ x + C_2, & -1 \leq x \leq 1, \\ \frac{x^3}{3} + C_3, & x > 1. \end{cases}$$

又  $g(x)$  为连续函数, 所以

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = -\frac{1}{3} + C_1 = -1 + C_2 = g(-1), \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \frac{1}{3} + C_3 = 1 + C_2 = g(1).$$

解得  $C_1 = -\frac{2}{3} + C_2, C_3 = \frac{2}{3} + C_2$ , 于是取  $C = C_2$ , 得

$$g(x) = \int \max\{1, x^2\} dx = \begin{cases} \frac{x^3}{3} - \frac{2}{3} + C, & x < -1, \\ x + C, & -1 \leq x \leq 1, \\ \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3} + C, & x > 1. \end{cases}$$

#### 题型 4-10 综合题型的不定积分的计算

例 4.18 求  $\int \sin \sqrt[3]{x} dx$ .

【分析】被积函数中含  $\sqrt[3]{x}$ , 首先去掉根式, 再两次用分部积分法积分.

解 令  $\sqrt[3]{x} = t$ , 即  $x = t^3$ , 则  $dx = 3t^2 dt$ , 于是

$$\text{原式} = \int \sin t \cdot 3t^2 dt = -3 \int t^2 d\cos t = -3t^2 \cos t + 3 \int \cos t \cdot 2t dt = -3t^2 \cos t + 6 \int t d\sin t$$

$$\begin{aligned}
 &= -3t^2 \cos t + 6t \sin t - 6 \int \sin t dt = -3t^2 \cos t + 6t \sin t + 6 \cos t + C \\
 &= -3x^{\frac{2}{3}} \cos \sqrt[3]{x} + 6 \sqrt[3]{x} \sin \sqrt[3]{x} + 6 \cos \sqrt[3]{x} + C.
 \end{aligned}$$

例 4.19 求  $\int e^x \left( \frac{1-x}{1+x^2} \right)^2 dx$ .

【分析】用分部积分法  $e^x$  宜放在  $dv$  部分, 而另一因式  $\left( \frac{1-x}{1+x^2} \right)^2$  较烦琐, 应先拆项化简.

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \int e^x \left( \frac{1-x}{1+x^2} \right)^2 dx &= \int e^x \left[ \frac{1}{1+x^2} - \frac{2x}{(1+x^2)^2} \right] dx = \int \frac{e^x}{1+x^2} dx + \int e^x d\left( \frac{1}{1+x^2} \right) \\
 &= \int \frac{e^x}{1+x^2} dx + \frac{e^x}{1+x^2} - \int \frac{e^x}{1+x^2} dx = \frac{e^x}{1+x^2} + C.
 \end{aligned}$$

例 4.20 求  $\int \frac{x^2+1}{x(x-1)^2} \ln x dx$ .

【分析】用分部积分法  $\ln x$  应放在分部积分的  $u$  中, 另一因式  $\frac{x^2+1}{x(x-1)^2}$  较烦琐, 应先拆项化简.

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \int \frac{x^2+1}{x(x-1)^2} \ln x dx &= \int \left( \frac{1}{x} + \frac{2}{(x-1)^2} \right) \ln x dx = \int \frac{1}{x} \ln x dx + 2 \int \frac{1}{(x-1)^2} \ln x dx \\
 &= \int \ln x d \ln x - 2 \int \ln x d \left( \frac{1}{x-1} \right) \\
 &= \frac{\ln^2 x}{2} - 2 \frac{\ln x}{x-1} + 2 \int \frac{1}{x(x-1)} dx \\
 &= \frac{\ln^2 x}{2} - \frac{2 \ln x}{x-1} + 2 \int \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} \right) dx \\
 &= \frac{\ln^2 x}{2} - 2 \frac{\ln x}{x-1} + 2 \ln |x-1| - 2 \ln |x| + C.
 \end{aligned}$$

## 4.4 课后习题解答

### 习题 4.1

1. 设  $f(x) = (2x+1)e^{-x^2}$ , 则  $\int f'(x) dx =$  \_\_\_\_\_.

解 因为  $\int f'(x) dx = f(x) + C$ , 所以  $\int f'(x) dx = (2x+1)e^{-x^2} + C$ .

2. 设  $\sin x$  是  $f(x)$  的一个原函数, 则  $\int f(x) dx =$  \_\_\_\_\_.

解 因为  $\sin x$  是  $f(x)$  的一个原函数, 所以  $\int f(x) dx = \sin x + C$ .

3. 求下列不定积分:

(1)  $\int (1 - \sqrt[3]{x^2})^2 dx;$

(2)  $\int \left( \frac{x}{2} - \frac{1}{x} + \frac{4}{x^3} \right) dx;$

(3)  $\int \left( 2^x + x^2 + \frac{3}{x} \right) dx;$

(4)  $\int \left( \frac{1}{x} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx;$

(5)  $\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)};$

(6)  $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)} dx;$



(7)  $\int 2^x e^{-x} dx;$

(8)  $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x-1} dx;$

(9)  $\int \cot^2 x dx;$

(10)  $\int \frac{2 \times 3^x - 5 \times 2^x}{3^x} dx;$

(11)  $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx;$

(12)  $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx;$

(13)  $\int \frac{dx}{1 + \cos 2x};$

(14)  $\int \frac{1 + \cos^2 x}{1 + \cos 2x} dx.$

解 (1)  $\int (1 - \sqrt[3]{x^2})^2 dx = \int (1 - 2x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{4}{3}}) dx = x - \frac{6}{5}x^{\frac{5}{3}} + \frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}} + C;$

(2)  $\int \left( \frac{x}{2} - \frac{1}{x} + \frac{4}{x^3} \right) dx = \frac{x^2}{4} - \ln|x| - \frac{2}{x^2} + C;$

(3)  $\int \left( 2^x + x^2 + \frac{3}{x} \right) dx = \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{x^3}{3} + 3\ln|x| + C;$

(4)  $\int \left( \frac{1}{x} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx = \ln|x| - 3\arcsin x + C;$

(5)  $\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)} = \int \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = -\frac{1}{x} - \arctan x + C;$

(6)  $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)} dx = \int \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1+x^2} \right) dx = -\frac{1}{x} + \arctan x + C;$

(7)  $\int 2^x e^{-x} dx = \int (2e^{-1})^x dx = \frac{(2e^{-1})^x}{\ln(2e^{-1})} + C = \frac{2^x e^{-x}}{\ln 2 - 1} + C;$

(8)  $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x-1} dx = \int (e^x+1) dx = e^x + x + C;$

(9)  $\int \cot^2 x dx = \int (\csc^2 x - 1) dx = \int \csc^2 x dx - \int 1 dx = -\cot x - x + C;$

(10)  $\int \frac{2 \times 3^x - 5 \times 2^x}{3^x} dx = \int \left[ 2 - 5 \left( \frac{2}{3} \right)^x \right] dx = 2x - \frac{5 \left( \frac{2}{3} \right)^x}{\ln \left( \frac{2}{3} \right)} + C = 2x - \frac{5}{\ln 2 - \ln 3} \left( \frac{2}{3} \right)^x + C;$

(11)  $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx = \int \frac{1}{2} (1 - \cos x) dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos x) dx = \frac{1}{2} \left[ \int dx - \int \cos x dx \right] = \frac{1}{2} (x - \sin x) + C;$

(12)  $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - \sin x} dx = \int (\cos x + \sin x) dx = \sin x - \cos x + C;$

(13)  $\int \frac{dx}{1 + \cos 2x} = \int \frac{1}{2 \cos^2 x} dx = \frac{1}{2} \tan x + C;$

(14)  $\int \frac{1 + \cos^2 x}{1 + \cos 2x} dx = \int \frac{1 + \cos^2 x}{2 \cos^2 x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \frac{1}{2} \int 1 dx = \frac{1}{2} \tan x + \frac{1}{2} x + C.$

4. 一曲线通过点  $(e^2, 3)$ , 且在任一点处的切线的斜率等于该点横坐标的倒数, 求该曲线的方程.

解 根据题意知  $f'(x) = \frac{1}{x}$ , 即  $f(x)$  是  $\frac{1}{x}$  的一个原函数, 从而  $f(x) = \int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$ .

由于曲线通过点  $(e^2, 3)$ , 得  $3 = 2 + C$ , 即  $C = 1$ , 故所求曲线方程为  $y = \ln x + 1$ .

5. 对任意  $x \in \mathbf{R}$ ,  $f'(\sin^2 x) = \cos^2 x$  且  $f(1) = 1$ , 求  $f(x)$ .

解 设  $t = \sin^2 x$ , 则  $f'(t) = 1 - t$ , 即  $f'(x) = 1 - x$ , 于是  $f(x) = \int (1 - x) dx = x - \frac{x^2}{2} + C$ .

又由于  $f(1) = 1$ , 所以  $1 - \frac{1}{2} + C = 1$ , 即  $C = \frac{1}{2}$ , 因此  $f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}$ .

6. 已知  $F'(x) = \frac{\cos 2x}{\sin^2 2x}$ , 且  $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$ , 求  $F(x)$ .

解 根据题设条件, 有

$$F(x) = \int F'(x) dx = \int \frac{\cos 2x}{\sin^2 2x} dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{4 \sin^2 x \cos^2 x} dx$$

$$= \frac{1}{4} \int \left( \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = -\frac{1}{4} (\tan x + \cot x) + C.$$

由  $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$ , 得  $-\frac{1}{4} \left( \tan \frac{\pi}{4} + \cot \frac{\pi}{4} \right) + C = -1$ , 即  $C = -\frac{1}{2}$ , 故  $F(x) = -\frac{1}{4} (\tan x + \cot x) - \frac{1}{2}$ .

### 提高题

1.  $y = y(x)$  在任何点  $x$  处的增量  $\Delta y = \frac{2x}{1+x^2} \Delta x + o(\Delta x)$ , 且  $y(0) = 0$ , 则  $y(1) =$  \_\_\_\_\_.

解 因为  $\Delta y = \frac{2x}{1+x^2} \Delta x + o(\Delta x)$ , 所以  $y' = \frac{2x}{1+x^2}$ , 故  $y = \int y' dx = \int \frac{2x}{1+x^2} dx = \ln(1+x^2) + C$ .

由  $y(0) = 0$  得  $0 = \ln(1+0) + C$ , 故  $C = 0$ , 从而  $y = \ln(1+x^2) + C = \ln(1+x^2)$ , 于是  $y(1) = \ln 2$ .

2.  $f'(e^x) = 1 + e^{2x}$ ,  $f(0) = 1$ , 求  $f(x)$ .

解 因为  $f'(e^x) = 1 + (e^x)^2$ , 所以  $f'(x) = 1 + x^2$ , 于是

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (1 + x^2) dx = x + \frac{1}{3} x^3 + C.$$

由  $f(0) = 1$  得  $C = 1$ , 故  $f(x) = x + \frac{1}{3} x^3 + 1$ .

3. 设某商品的收益函数为  $R(p)$ , 收益弹性为  $1 + p^3$ , 其中  $p$  为价格, 且  $R(1) = 1$ , 求  $R(p)$ .

解 由题意得  $\frac{dR}{R} / \frac{dp}{p} = 1 + p^3$ , 故  $\int \frac{dR}{R} = \int \frac{1+p^3}{p} dp$ , 于是  $\ln R = \ln p + \frac{p^3}{3} + C$ .

把  $R(1) = 1$  代入上式, 得  $C = -\frac{1}{3}$ , 于是  $\ln R = \ln p + \frac{p^3}{3} - \frac{1}{3}$ .

4. 设某商品的最大需求量为 1200 件, 该商品的需求函数  $Q = Q(p)$ , 需求弹性  $\eta = \frac{p}{120-p} (\eta > 0)$ ,  $p$  为单价(单位: 万元).

(1) 求需求函数的表达式;

(2) 求  $p = 100$  万元时的边际效益, 并说明其经济意义.

解 (1) 由题意得  $\eta = -\frac{dQ}{Q} / \frac{dp}{p} = \frac{p}{120-p}$ , 于是得  $\frac{dQ}{Q} = -\frac{dp}{120-p}$ , 故  $\int \frac{dQ}{Q} = -\int \frac{dp}{120-p}$ , 即  $\ln Q = \ln(120-p) + \ln C$ , 进一步得  $Q = C(120-p)$ .

当  $p = 0$  时, 由  $Q = 1200$ , 得  $C = 10$ , 所以  $Q = 10(120-p) = 1200 - 10p$ .

(2)  $R = Qp = Q \frac{1200-Q}{10}$ , 故  $\frac{dR}{dQ} = \frac{1200-2Q}{10}$ , 当  $p = 100$  时,  $Q = 200$ ,  $\left. \frac{dR}{dQ} \right|_{p=100} = \frac{1200-400}{10}$

80, 即需求量每提高 1 件, 收益增加 80 万元.

### 习题 4.2

1. 填空:

(1)  $dx =$  \_\_\_\_\_  $d(5x+2)$ ;

(2)  $\sin 3x dx =$  \_\_\_\_\_  $d \cos 3x$ ;

(3)  $x^9 dx =$  \_\_\_\_\_  $d(2x^{10}-5)$ ;

(4)  $e^{3x} dx =$  \_\_\_\_\_  $d e^{3x}$ ;

(5)  $\frac{1}{2x+1} dx =$  \_\_\_\_\_  $d(7 \ln(2x+1))$ ;

(6)  $\frac{1}{x^2} dx =$  \_\_\_\_\_  $d\left(\frac{2}{x}\right)$ ;

(7)  $\frac{1}{\sqrt{1-9x^2}} dx =$  \_\_\_\_\_  $d(\arcsin 3x)$ ;

(8)  $\frac{dx}{\cos^2 2x} =$  \_\_\_\_\_  $d(\tan 2x)$ ;

(9)  $\frac{dx}{1+9x^2} =$  \_\_\_\_\_  $d(\arctan 3x)$ .

解 (1)  $\frac{1}{5}$ ; (2)  $-\frac{1}{3}$ ; (3)  $\frac{1}{20}$ ; (4)  $\frac{1}{3}$ ; (5)  $\frac{1}{14}$ ; (6)  $-\frac{1}{2}$ ; (7)  $\frac{1}{3}$ ; (8)  $\frac{1}{2}$ ; (9)  $\frac{1}{3}$ .



2. 求下列不定积分:

$$(1) \int (3-2x)^{10} dx; \quad (2) \int \frac{dx}{\sqrt[3]{2-3x}}; \quad (3) \int e^{3x-1} dx; \quad (4) \int \frac{1}{1-5x} dx;$$

$$(5) \int \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} dx \quad (6) \int \frac{\sin \sqrt{t}}{\sqrt{t}} dt; \quad (7) \int \frac{dx}{x \ln x \ln \ln x}; \quad (8) \int x \cos x^2 dx;$$

$$(9) \int \frac{x dx}{\sqrt{2-3x^2}}; \quad (10) \int \frac{1-\tan x}{1+\tan x} dx; \quad (11) \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}; \quad (12) \int \frac{3x^3}{1-x^4} dx;$$

$$(13) \int \frac{dx}{x(2+5\ln x)}; \quad (14) \int \frac{\arccos^2 x}{\sqrt{1-x^2}} dx; \quad (15) \int \frac{6^x}{4^x + 9^x} dx; \quad (16) \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx;$$

$$(17) \int \cos^3 x dx; \quad (18) \int \frac{10^{\arctan x}}{1+x^2} dx; \quad (19) \int \frac{1}{1+e^x} dx; \quad (20) \int \frac{x+1}{\sqrt{2-x-x^2}} dx;$$

$$(21) \int \frac{dx}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}}; \quad (22) \int \frac{1+\ln x}{(x \ln x)^2} dx; \quad (23) \int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^4 x} dx; \quad (24) \int \frac{x^2 dx}{(x-1)^{100}}.$$

解 (1)  $\int (3-2x)^{10} dx = -\frac{1}{2} \int (3-2x)^{10} d(3-2x) = -\frac{1}{22} (3-2x)^{11} + C;$

(2)  $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2-3x}} = -\frac{1}{3} \int (2-3x)^{-\frac{1}{3}} d(2-3x) = -\frac{1}{3} \times \frac{3}{2} (2-3x)^{\frac{2}{3}} + C = -\frac{1}{2} (2-3x)^{\frac{2}{3}} + C;$

(3)  $\int e^{3x-1} dx = \frac{1}{3} \int e^{3x-1} d(3x-1) = \frac{1}{3} e^{3x-1} + C;$

(4)  $\int \frac{1}{1-5x} dx = -\frac{1}{5} \int \frac{1}{1-5x} d(1-5x) = -\frac{1}{5} \ln |1-5x| + C;$

(5)  $\int \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} dx = \int e^{-\frac{1}{x}} d\left(-\frac{1}{x}\right) = e^{-\frac{1}{x}} + C;$

(6)  $\int \frac{\sin \sqrt{t}}{\sqrt{t}} dt = 2 \int \sin \sqrt{t} d\sqrt{t} = -2 \cos \sqrt{t} + C;$

(7)  $\int \frac{dx}{x \ln x \ln \ln x} = \int \frac{d \ln \ln x}{\ln \ln x} = \ln |\ln \ln x| + C;$

(8)  $\int x \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \int \cos x^2 dx^2 = \frac{1}{2} \sin x^2 + C;$

(9)  $\int \frac{x dx}{\sqrt{2-3x^2}} = -\frac{1}{6} \int (2-3x^2)^{-\frac{1}{2}} d(2-3x^2) = -\frac{1}{6} \times 2 \sqrt{2-3x^2} + C = -\frac{1}{3} \sqrt{2-3x^2} + C;$

(10)  $\int \frac{1-\tan x}{1+\tan x} dx = \int \frac{1-\frac{\sin x}{\cos x}}{1+\frac{\sin x}{\cos x}} dx = \int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx = \int \frac{d(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} = \ln |\sin x + \cos x| + C;$

(11)  $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{e^x dx}{(e^x)^2 + 1} = \int \frac{de^x}{(e^x)^2 + 1} = \arctan e^x + C;$

(12)  $\int \frac{3x^3}{1-x^4} dx = -\frac{3}{4} \int \frac{d(1-x^4)}{1-x^4} = -\frac{3}{4} \ln |1-x^4| + C;$

(13)  $\int \frac{dx}{x(2+5\ln x)} = \frac{1}{5} \int \frac{d(2+5\ln x)}{(2+5\ln x)} = \frac{1}{5} \ln |2+5\ln x| + C;$

(14)  $\int \frac{\arccos^2 x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \arccos^2 x d(\arccos x) = -\frac{1}{3} (\arccos x)^3 + C;$

(15)  $\int \frac{6^x}{4^x + 9^x} dx = \int \frac{6^x}{9^x \left[ \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + 1 \right]} dx = \int \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\left[ \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + 1 \right]} dx = \frac{1}{\ln 2 - \ln 3} \arctan \left(\frac{2}{3}\right)^x + C;$

(16)  $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx = \int \frac{d \cos x}{\cos^3 x} = -\frac{1}{2 \cos^2 x} + C;$

$$(17) \int \cos^3 x dx = \int \cos^2 x \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x) d\sin x = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C;$$

$$(18) \int \frac{10^{\arctan x}}{1+x^2} dx = \int 10^{\arctan x} d\arctan x = \frac{10^{\arctan x}}{\ln 10} + C;$$

$$(19) \int \frac{1}{1+e^x} dx = \int \frac{(1+e^x) - e^x}{1+e^x} dx = \int dx - \int \frac{e^x}{1+e^x} dx = x - \int \frac{d(1+e^x)}{1+e^x} = x - \ln(1+e^x) + C;$$

$$\begin{aligned} (20) \int \frac{x+1}{\sqrt{2-x-x^2}} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+1}{\sqrt{2-x-x^2}} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{2-x-x^2}} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d(2-x-x^2)}{\sqrt{2-x-x^2}} + \frac{1}{2} \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{3-(x+1)^2}} \\ &= \sqrt{2-x-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C; \end{aligned}$$

$$(21) \int \frac{dx}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}} = \int \frac{d\arcsin x}{(\arcsin x)^2} = -\frac{1}{\arcsin x} + C;$$

$$(22) \int \frac{1+\ln x}{(x \ln x)^2} dx = \int \frac{d(x \ln x)}{(x \ln x)^2} = -\frac{1}{x \ln x} + C;$$

$$(23) \int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^4 x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d \sin^2 x}{1+\sin^4 x} = \frac{1}{2} \arctan(\sin^2 x) + C;$$

$$\begin{aligned} (24) \int \frac{x^2 dx}{(x-1)^{100}} &= \int \frac{(x^2-1)+1}{(x-1)^{100}} dx = \int \frac{x+1}{(x-1)^{99}} dx + \int \frac{1}{(x-1)^{100}} dx \\ &= \int \frac{x-1+2}{(x-1)^{99}} dx + \int \frac{1}{(x-1)^{100}} dx \\ &= \int \frac{1}{(x-1)^{98}} d(x-1) + 2 \int \frac{1}{(x-1)^{99}} d(x-1) + \int \frac{1}{(x-1)^{100}} d(x-1) \\ &= -\frac{1}{97} \frac{1}{(x-1)^{97}} - \frac{1}{49} \frac{1}{(x-1)^{98}} - \frac{1}{99} \frac{1}{(x-1)^{99}} + C. \end{aligned}$$

3. 求下列不定积分:

$$(1) \int \frac{dx}{1+\sqrt{1-x^2}}; \quad (2) \int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} dx; \quad (3) \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2+1}};$$

$$(4) \int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2} dx; \quad (5) \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}}; \quad (6) \int \sqrt{5-4x-x^2} dx.$$

解 (1)  $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx = \int \frac{1}{x^2} dx - \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx = -\frac{1}{x} - \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx.$

设  $x = \sin t$ , 则  $dx = \cos t dt$ , 于是

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx = \int \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} dt = \int \cot^2 t dt = \int (\csc^2 t - 1) dt = -\cot t - t + C = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + C.$$

从而  $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x - \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} + C.$

(2) 设  $x = 3 \sec t$ , 则  $dx = 3 \sec t \tan t dt$ , 于是

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} dx &= \int \frac{3 \tan t}{3 \sec t} 3 \sec t \tan t dt = 3 \int \tan^2 t dt = 3 \int (\sec^2 t - 1) dt \\ &= 3(\tan t - t) + C = \sqrt{x^2-9} - 3 \arccos \frac{3}{|x|} + C. \end{aligned}$$

(3) 设  $x = \tan t$ , 则  $dx = \sec^2 t dt$ , 于是

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2+1}} = \int \frac{1}{\tan^2 t \sec t} \sec^2 t dt = \int \frac{\cos t}{\sin^2 t} dt = \int \frac{d(\sin t)}{\sin^2 t} = -\frac{1}{\sin t} + C = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C.$$



(4) 设  $x = a \sin t$ , 则  $dx = a \cos t dt$ , 于是

$$\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2} dx = \int \frac{a \cos t}{a^2 \sin^2 t} a \cos t dt = \int \cot^2 t dt = \int (\csc^2 t - 1) dt$$

$$= -\cot t - t + C = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} - \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

(5) 设  $x = a \tan t$ , 则  $dx = a \sec^2 t dt$ , 于是

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \int \frac{1}{a^3 \sec^3 t} a \sec^2 t dt = \frac{1}{a^2} \int \cos t dt = \frac{1}{a^2} \sin t + C = \frac{1}{a^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} + C.$$

(6) 设  $x+2 = 3 \sin t$ , 则  $dx = 3 \cos t dt$ , 于是

$$\int \sqrt{5-4x-x^2} dx = \int \sqrt{9-(x+2)^2} dx = 9 \int \cos^2 t dt = 9 \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{9}{2} \left( t + \frac{\sin 2t}{2} \right) + C$$

$$= \frac{9}{2} (t + \sin t \cos t) + C = \frac{9}{2} \arcsin \frac{x+2}{3} + \frac{x+2}{2} \sqrt{5-4x-x^2} + C.$$

### 提高题

1.  $\int \frac{3 \cos x + \sin x}{2 \sin x + \cos x} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

解  $\int \frac{3 \cos x + \sin x}{2 \sin x + \cos x} dx = \int \left( \frac{2 \sin x + \cos x}{2 \sin x + \cos x} + \frac{2 \cos x - \sin x}{2 \sin x + \cos x} \right) dx = \int 1 dx + \int \frac{1}{2 \sin x + \cos x} d(2 \sin x + \cos x)$   
 $= x + \ln |2 \sin x + \cos x| + C.$

2. 若  $\int f(x) dx = x^2 + C$ , 求  $\int x f(1-x^2) dx$ .

解  $\int x f(1-x^2) dx = -\frac{1}{2} \int f(1-x^2) d(1-x^2) = -\frac{1}{2} (1-x^2)^2 + C.$

3.  $\int x f(x^2) f'(x^2) dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

解  $\int x f(x^2) f'(x^2) dx \xrightarrow{t=x^2} \frac{1}{2} \int f(t) f'(t) dt = \frac{1}{2} \int f(t) df(t) = \frac{f^2(t)}{4} + C = \frac{f^2(x^2)}{4} + C.$

4. 已知  $f(x) = e^{-x}$ , 求  $\int \frac{f'(\ln x)}{x} dx$ .

解  $\int \frac{f'(\ln x)}{x} dx = \int f'(\ln x) d \ln x = f(\ln x) + C = e^{-\ln x} + C = \frac{1}{x} + C.$

5. 已知  $f'(\cos x) = \sin x$ , 求  $f(\cos x)$ .

解  $\int f'(\cos x) \sin x dx = -\int f'(\cos x) d \cos x = -f(\cos x) + C_1.$

又  $\int f'(\cos x) \sin x dx = \int \sin^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C_2.$  故

$$f(\cos x) = \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{x}{2} + C (C = C_1 - C_2).$$

### 习题 4.3

1. 求下列不定积分:

(1)  $\int x \cos 2x dx;$

(2)  $\int x e^{-x} dx;$

(3)  $\int \ln(x^2+1) dx;$

(4)  $\int \arccos x dx;$

(5)  $\int \arctan x dx;$

(6)  $\int \ln^2 x dx;$

(7)  $\int x \cos^2 x dx;$

(8)  $\int x \ln(x-1) dx;$

(9)  $\int \cos \ln x dx;$

(10)  $\int e^{\sqrt{2x+1}} dx;$

(11)  $\int e^x \sin^2 x dx;$

(12)  $\int (\arcsin x)^2 dx;$

$$(13) \int \frac{\ln \sin x}{\sin^2 x} dx; \quad (14) \int \frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2} dx; \quad (15) \int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

解 (1)  $\int x \cos 2x dx = \int x d \frac{\sin 2x}{2} = \frac{x}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x dx = \frac{x}{2} \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C;$

(2)  $\int x e^{-x} dx = \int x d(-e^{-x}) = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x} + C;$

(3)  $\int \ln(x^2+1) dx = x \ln(x^2+1) - \int \frac{2x^2}{x^2+1} dx = x \ln(x^2+1) - 2 \left( \int dx - \int \frac{1}{x^2+1} dx \right)$   
 $= x \ln(x^2+1) - 2x + 2 \arctan x + C;$

(4)  $\int \arccos x dx = x \arccos x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \arccos x - \frac{1}{2} \int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$   
 $= x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C;$

(5)  $\int \arctan x dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2}$   
 $= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C;$

(6)  $\int \ln^2 x dx = x \ln^2 x - 2 \int \ln x dx = x \ln^2 x - 2 \left( x \ln x - \int dx \right) = x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + C;$

(7)  $\int x \cos^2 x dx = \int x \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \left[ \frac{x^2}{2} + \int x d \left( \frac{\sin 2x}{2} \right) \right]$   
 $= \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{4} x \sin 2x + \frac{1}{8} \cos 2x + C;$

(8)  $\int x \ln(x-1) dx = \int \ln(x-1) d \left( \frac{x^2}{2} \right) = \frac{x^2}{2} \ln(x-1) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{x-1}$   
 $= \frac{x^2}{2} \ln(x-1) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2-1+1}{x-1} dx$   
 $= \frac{x^2}{2} \ln(x-1) - \frac{1}{2} \int \left( x+1 + \frac{1}{x-1} \right) dx$   
 $= \frac{1}{2} (x^2-1) \ln(x-1) - \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{2} x + C;$

(9)  $\int \cos \ln x dx = x \cos \ln x + \int x \sin \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = x \cos \ln x + \int \sin \ln x dx$   
 $= x \cos \ln x + x \sin \ln x - \int \cos \ln x dx,$

故  $\int \cos \ln x dx = \frac{x}{2} (\sin \ln x + \cos \ln x) + C.$

(10) 设  $t = \sqrt{2x+1}$ , 即  $x = \frac{1}{2}(t^2-1)$ , 则  $dx = t dt$ , 于是

$$\int e^{\sqrt{2x+1}} dx = \int e^t t dt = \int t d e^t = t e^t - e^t + C = e^{\sqrt{2x+1}} (\sqrt{2x+1} - 1) + C.$$

(11)  $\int e^x \sin^2 x dx = \int e^x \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int e^x dx - \frac{1}{2} \int e^x \cos 2x dx = \frac{1}{2} e^x - \frac{1}{2} \int e^x \cos 2x dx.$

而  $\int e^x \cos 2x dx = \int \cos 2x d e^x = e^x \cos 2x + 2 \int e^x \sin 2x dx = e^x \cos 2x + 2 \int \sin 2x d e^x$   
 $= e^x \cos 2x + 2 e^x \sin 2x - 4 \int e^x \cos 2x dx,$

故  $\int e^x \cos 2x dx = \frac{1}{5} (\cos 2x + 2 \sin 2x) e^x + C$ , 从而  $\int e^x \sin^2 x dx = \frac{1}{2} e^x - \frac{1}{10} (\cos 2x + 2 \sin 2x) e^x + C.$



$$\begin{aligned}
 (12) \int (\arcsin x)^2 dx &= x(\arcsin x)^2 - \int x \cdot 2\arcsin x \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\
 &= x(\arcsin x)^2 + 2 \int \arcsin x d\sqrt{1-x^2} \\
 &= x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2 \int dx \\
 &= x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (13) \int \frac{\ln \sin x}{\sin^2 x} dx &= \int \ln \sin x d(-\cot x) = -\cot x \ln \sin x + \int \frac{\cot x}{\sin x} \cos x dx \\
 &= -\cot x \ln \sin x + \int \cot^2 x dx = -\cot x \ln \sin x + \int (\csc^2 x - 1) dx \\
 &= -\cot x \ln \sin x - \cot x - x + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (14) \int \frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2} dx &= \int \ln(1+x) d\left(\frac{1}{2-x}\right) = \frac{1}{2-x} \ln(1+x) - \int \frac{1}{(1+x)(2-x)} dx \\
 &= \frac{1}{2-x} \ln(1+x) - \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2-x}\right) dx \\
 &= \frac{1}{2-x} \ln(1+x) + \frac{1}{3} \ln \left| \frac{2-x}{1+x} \right| + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (15) \int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= - \int \arcsin x d\sqrt{1-x^2} = - \left( \sqrt{1-x^2} \arcsin x - \int dx \right) \\
 &= -\sqrt{1-x^2} \arcsin x + x + C.
 \end{aligned}$$

2. 设函数  $f(x)$  有连续的导函数, 且  $\int f(x) dx = \sin x e^x + C$ , 求  $\int x f'(x) dx$ .

解 因为  $\int f(x) dx = \sin x e^x + C$ , 所以  $f(x) = (\sin x e^x)' = (\cos x + \sin x) e^x$ , 于是

$$\begin{aligned}
 \int x f'(x) dx &= \int x d f(x) = x f(x) - \int f(x) dx = x(\cos x + \sin x) e^x - \sin x e^x + C \\
 &= (x \cos x + x \sin x - \sin x) e^x + C.
 \end{aligned}$$

3. 设  $f(x)$  的一个原函数为  $\frac{\sin x}{x}$ , 求  $\int x f'(x) dx$ .

解 因为  $f(x)$  的一个原函数为  $\frac{\sin x}{x}$ , 所以  $f(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$ , 于是

$$\begin{aligned}
 \int x f'(x) dx &= \int x d f(x) = x f(x) - \int f(x) dx = x \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} - \frac{\sin x}{x} + C \\
 &= \frac{x \cos x - 2 \sin x}{x} + C = \cos x - \frac{2 \sin x}{x} + C.
 \end{aligned}$$

### 提高题

1. 已知  $f'(e^x) = 1+x$ , 求  $f(x)$ .

解 设  $t = e^x$ , 即  $x = \ln t$ , 则  $f'(t) = 1 + \ln t$ , 即  $f'(x) = 1 + \ln x$ , 于是

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (1 + \ln x) dx = x \ln x + C.$$

2.  $\int e^{2x} (\tan x + 1)^2 dx =$  \_\_\_\_\_.

解  $\int e^{2x} (\tan x + 1)^2 dx = \int e^{2x} (\tan^2 x + 2 \tan x + 1) dx = \int e^{2x} (\sec^2 x - 1) dx + 2 \int e^{2x} \tan x dx + \frac{1}{2} e^{2x}$   
 $= \int e^{2x} \sec^2 x dx - \int e^{2x} dx + 2 \int e^{2x} \tan x dx + \frac{1}{2} e^{2x}.$

$$\int e^{2x} \sec^2 x dx + 2 \int e^{2x} \tan x dx = \int e^{2x} d \tan x + 2 \int e^{2x} \tan x dx = e^{2x} \tan x - \int \tan x 2e^{2x} dx + 2 \int e^{2x} \tan x dx = e^{2x} \tan x + C.$$

所以, 原式  $e^{2x} \tan x + C$ , 故应填  $e^{2x} \tan x + C$ .

3. 设函数  $f(x)$  的一个原函数为  $\frac{\sin x}{x}$ , 求  $\int x f'(2x) dx$ .

$$\begin{aligned} \text{解 } \int x f'(2x) dx &= \frac{1}{2} \int x f'(2x) d(2x) = \frac{1}{2} \int x df(2x) = \frac{1}{2} x f(2x) - \frac{1}{2} \int f(2x) dx \\ &= \frac{1}{2} x f(2x) - \frac{1}{4} \int f(2x) d(2x). \end{aligned}$$

由题设  $f(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$ , 所以

$$\int x f'(2x) dx = \frac{1}{2} x f(2x) - \frac{1}{4} \frac{\sin 2x}{2x} + C = \frac{\cos 2x}{4} - \frac{\sin 2x}{4x} + C.$$

4. 利用分部积分计算  $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ .

$$\begin{aligned} \text{解 } \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= x \sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{2x^2}{2 \sqrt{a^2 - x^2}} dx = x \sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{-a^2 + x^2 + a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \\ &= x \sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2} dx + \int \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx, \end{aligned}$$

故  $2 \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$ , 即

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} \left( x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right) + C.$$

#### 习题 4.4

1. 求下列不定积分:

$$\begin{array}{lll} (1) \int \frac{6x+5}{x^2+4} dx; & (2) \int \frac{2x+3}{x^2+8x+16} dx; & (3) \int \frac{x dx}{(x+2)(x+3)^2}; \\ (4) \int \frac{x dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}; & (5) \int \frac{dx}{x^3-8}; & (6) \int \frac{1}{x(x^2+1)} dx; \\ (7) \int \frac{2x^2-3x+1}{(x^2+1)(x^2+4)} dx; & (8) \int \frac{dx}{x(x^6+4)}; & (9) \int \frac{dx}{x^8(1-x^2)}. \end{array}$$

$$\text{解 } (1) \int \frac{6x+5}{x^2+4} dx = \int \frac{3}{x^2+4} d(x^2+4) + \int \frac{5}{x^2+4} dx = 3 \ln(x^2+4) + \frac{5}{2} \arctan \frac{x}{2} + C.$$

$$\begin{aligned} (2) \int \frac{2x+3}{x^2+8x+16} dx &= \int \frac{2x+8}{x^2+8x+16} dx - \int \frac{5}{x^2+8x+16} dx \\ &= \int \frac{d(x^2+8x+16)}{x^2+8x+16} - 5 \int \frac{d(x+4)}{(x+4)^2} \\ &= \ln(x^2+8x+16) + \frac{5}{x+4} + C = 2 \ln |x+4| + \frac{5}{x+4} + C. \end{aligned}$$

(3) 设  $\frac{x}{(x+2)(x+3)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+3)^2} + \frac{C}{x+3}$ , 其中  $A, B, C$  为待定系数, 两端比较, 得

$$x = A(x+3)^2 + B(x+2) + C(x+2)(x+3).$$

令  $x = -2$  得  $A = -2$ ; 令  $x = -3$  得  $B = 3$ ; 令  $x = 0$  得  $C = 2$ , 即

$$\begin{aligned} \frac{x}{(x+2)(x+3)^2} &= \frac{-2}{x+2} + \frac{3}{(x+3)^2} + \frac{2}{x+3}. \\ \int \frac{x}{(x+2)(x+3)^2} dx &= \int \left( \frac{-2}{x+2} + \frac{3}{(x+3)^2} + \frac{2}{x+3} \right) dx \\ &= \int \frac{2}{x+2} d(x+2) + \int \frac{3}{(x+3)^2} d(x+3) + \int \frac{2}{x+3} d(x+3) \end{aligned}$$



$$2\ln|x+2| - \frac{3}{x+3} + 2\ln|x+3| + C$$

$$= \ln\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^2 - \frac{3}{x+3} + C.$$

(4) 设  $\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}$ , 其中  $A, B, C$  为待定系数, 两端比较, 得

$$x = A(x+3)(x+2) + B(x+1)(x+3) + C(x+2)(x+1).$$

令  $x=-1$  得  $A=-\frac{1}{2}$ ; 令  $x=-2$  得  $B=2$ ; 令  $x=-3$  得  $C=-\frac{3}{2}$ , 即

$$\begin{aligned} \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} &= -\frac{1}{2(x+1)} + \frac{2}{x+2} - \frac{3}{2(x+3)}, \\ \int \frac{x dx}{(x+1)(x+2)(x+3)} &= -\frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1} + 2 \int \frac{dx}{x+2} - \frac{3}{2} \int \frac{dx}{x+3} \\ &= 2\ln|x+2| - \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{3}{2}\ln|x+3| + C. \end{aligned}$$

(5)  $x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$ , 令  $\frac{1}{x^3 - 8} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2 + 2x + 4}$ , 其中  $A, B, C$  为待定系数, 两端比较得

$$1 = A(x^2 + 2x + 4) + (Bx + C)(x - 2),$$

解得  $A = \frac{1}{12}, B = -\frac{1}{12}, C = -\frac{1}{3}$ .

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^3 - 8} &= \int \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{x-2} dx + \int \frac{-\frac{1}{12}x - \frac{1}{3}}{x^2 + 2x + 4} dx \\ &= \frac{1}{12} \int \frac{1}{x-2} d(x-2) - \frac{1}{24} \int \frac{2x+8}{x^2 + 2x + 4} dx \\ &= \frac{1}{12} \ln|x-2| - \frac{1}{24} \int \frac{2x+2}{x^2 + 2x + 4} dx - \frac{1}{24} \int \frac{6}{x^2 + 2x + 4} dx \\ &= \frac{1}{12} \ln|x-2| - \frac{1}{24} \int \frac{d(x^2 + 2x + 4)}{x^2 + 2x + 4} - \frac{1}{4} \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2 + 3} \\ &= \frac{1}{12} \ln|x-2| - \frac{1}{24} \ln(x^2 + 2x + 4) - \frac{1}{4\sqrt{3}} \arctan \frac{x+1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (6) \int \frac{1}{x(1+x^2)} dx &= \int \left( \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} \right) dx = \int \frac{1}{x} dx - \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} \\ &= \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C. \end{aligned}$$

(7) 令  $\frac{2x^2 - 3x + 1}{(x^2 + 1)(x^2 + x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2 + 1}$ , 其中  $A, B, C, D$  为待定系数, 两端比较得

$$\begin{aligned} 2x^2 - 3x + 1 &= A(x^2 + 1)(x+1) + Bx(x^2 + 1) + x(x+1)(Cx+D) \\ &= (A+B+C)x^3 + (A+D+C)x^2 + (A+B+D)x + A, \end{aligned}$$

$$\text{则} \begin{cases} A+B+C=0, \\ A+D+C=2, \\ A+B+D=-3, \\ A=1, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} A=1, \\ B=-3, \\ C=2, \\ D=-1. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 - 3x + 1}{(x^2 + 1)(x^2 + x)} dx &= \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{-3}{x+1} dx + \int \frac{2x-1}{x^2 + 1} dx \\ &= \ln|x| - 3\ln|x+1| + \ln(x^2 + 1) - \arctan x + C. \end{aligned}$$

$$(8) \int \frac{dx}{x(x^6 + 4)} = \int \frac{x^5 dx}{x^6(x^6 + 4)} = \frac{1}{4} \int \frac{x^5 dx}{x^6} - \frac{1}{4} \int \frac{x^5 dx}{x^6 + 4} = \frac{1}{24} \int \frac{d(x^6)}{x^6} - \frac{1}{24} \int \frac{d(x^6 + 4)}{x^6 + 4}$$

$$= -\frac{1}{6} \ln |x| - \frac{1}{24} \ln(x^6 + 4) + C.$$

(9) 令  $\frac{1}{x^8(1-x^2)} = \frac{A_1}{x^8} + \frac{A_2}{x^7} + \frac{A_3}{x^6} + \frac{A_4}{x^5} + \frac{A_5}{x^4} + \frac{A_6}{x^3} + \frac{A_7}{x^2} + \frac{A_8}{x} + \frac{B_1}{1+x} + \frac{B_2}{1-x}$ , 其中  $A_1, A_2, \dots, A_8, B_1, B_2$  为待定系数, 于是得

$$1 = A_1(1-x^2) + A_2x(1-x^2) + \dots + A_8x^7(1-x^2) + B_1x^8(1-x) + B_2x^8(1+x).$$

两端比较系数解得

$$A_1 = 1, A_2 = 0, A_3 = 1, A_4 = 0, A_5 = 1, A_6 = 0, A_7 = 1, A_8 = 0, B_1 = \frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{2},$$

所以

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^8(1-x^2)} &= \int \frac{1}{x^8} dx + \int \frac{1}{x^6} dx + \int \frac{1}{x^4} dx + \int \frac{1}{x^2} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1-x} dx \\ &= \frac{1}{7x^7} - \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln |1+x| - \frac{1}{2} \ln |1-x| + C \\ &= \frac{1}{7x^7} - \frac{1}{5x^5} - \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right| + C. \end{aligned}$$

2. 求下列不定积分:

$$\begin{aligned} (1) \int \frac{\sqrt{x+2}}{x+3} dx; \quad (2) \int \frac{1}{x^2} \sqrt{\left(\frac{x}{x+1}\right)^3} dx; \quad (3) \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}; \\ (4) \int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx; \quad (5) \int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} dx; \quad (6) \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-2)^3(x+1)^5}}. \end{aligned}$$

解 (1) 令  $t = \sqrt{x+2}$ , 即  $x = t^2 - 2$ , 则  $dx = 2t dt$ , 于是

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x+2}}{x+3} dx &= \int \frac{t}{t^2+1} 2t dt = 2 \int \frac{t^2+1-1}{t^2+1} dt = 2 \int \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right) dt \\ &= 2(t - \arctan t) + C = 2\sqrt{x+2} - 2\arctan \sqrt{x+2} + C. \end{aligned}$$

(2) 令  $t = \sqrt[5]{\frac{x}{1+x}}$ , 即  $x = \frac{t^5}{1-t^5}$ , 则  $dx = \frac{5t^4}{(1-t^5)^2} dt$ , 于是

$$\int \frac{1}{x^2} \sqrt{\left(\frac{x}{1+x}\right)^3} dx = \int \left(\frac{1-t^5}{t^5}\right)^2 t^3 \frac{5t^4}{(1-t^5)^2} dt = 5 \int \frac{1}{t^3} dt = -\frac{5}{2} \frac{1}{t^2} + C = -\frac{5}{2} \left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{2}{5}} + C.$$

(3) 设  $x = t^4$ , 则  $dx = 4t^3 dt$ , 于是

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} dx &= \int \frac{4t^3}{t^2+t} dt = \int \frac{4t^2}{t+1} dt = 4 \int \frac{t^2-1+1}{t+1} dt = 4 \int \left(t-1+\frac{1}{t+1}\right) dt \\ &= 4\left(\frac{t^2}{2} - t + \ln |t+1|\right) + C = 2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4\ln(\sqrt[4]{x}+1) + C. \end{aligned}$$

(4) 令  $t = \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ , 即  $x = \frac{a(t^2-1)}{t^2+1}$ , 则  $dx = \frac{4at dt}{(t^2+1)^2}$ , 于是  $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx = 4a \int \frac{t^2 dt}{(t^2+1)^2}$ .

设  $t = \tan u$ , 则  $dt = \sec^2 u du$ , 于是

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx &= 4a \int \frac{\tan^2 u}{\sec^4 u} \sec^2 u du = 4a \int \sin^2 u du = 4a \int \frac{1-\cos 2u}{2} du = 2a \left(u - \frac{\sin 2u}{2}\right) + C \\ &= 2a \left(\arctan t - \frac{t}{1+t^2}\right) + C = 2a \left(\arctan \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} - \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{2a}\right) + C \\ &\quad - 2a \arctan \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} - \sqrt{a^2-x^2} + C. \end{aligned}$$

(5) 令  $t = \sqrt{x+1}$ , 即  $x = t^2 - 1$ , 则  $dx = 2t dt$ , 于是

$$\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} dx = \int \frac{t-1}{t+1} 2t dt = 2 \int \frac{t^2-t}{t+1} dt = 2 \int \frac{t^2+t-(2t+2)+2}{t+1} dt$$



$$2 \left( \int t dt - 2 \int dt + \int \frac{2}{t+1} dt \right) = 2 \left( \frac{t^2}{2} - 2t + 2 \ln |t+1| \right) + C_1 \\ = x - 4\sqrt{x+1} + 4 \ln(\sqrt{x+1} + 1) + C,$$

其中  $C = C_1 + 1$ .

$$(6) \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-2)^3(x+1)^5}} = \int \frac{1}{(x+1)^2} \sqrt[4]{\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^3} dx.$$

令  $t = \sqrt[4]{\frac{x+1}{x-2}}$ , 即  $x = \frac{2t^4+1}{t^4-1}$ , 则  $dx = \frac{-12t^3}{(t^4-1)^2} dt$ , 于是

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-2)^3(x+1)^5}} = \int \frac{(t^4-1)^2}{9t^8} \cdot t^3 \cdot \frac{-12t^3}{(t^4-1)^2} dt = -\frac{4}{3} \int \frac{1}{t^2} dt = \frac{4}{3t} + C = \frac{4}{3} \sqrt[4]{\frac{x-2}{x+1}} + C.$$

### 提高题

1. 求下列不定积分:

$$(1) \int \frac{1}{1+\tan x} dx; \quad (2) \int \sin(\ln x) dx; \quad (3) \int \frac{x+1}{x^2 \sqrt{x^2-1}} dx; \quad (4) \int \frac{dx}{(1+5x^2) \sqrt{1+x^2}}.$$

$$\text{解 } (1) \int \frac{1}{1+\tan x} dx = \int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{\cos x + \sin x + \cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx \\ = \frac{1}{2} \int \left( 1 + \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} \right) dx = \frac{1}{2} \left[ x + \int \frac{1}{\sin x + \cos x} d(\sin x + \cos x) \right] \\ = \frac{1}{2} (x + \ln |\cos x + \sin x|) + C.$$

$$(2) \int \sin(\ln x) dx = x \sin(\ln x) - \int x \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x} dx = x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx \\ = x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x) - \int \sin(\ln x) dx,$$

$$\text{所以 } \int \sin(\ln x) dx = \frac{x}{2} [\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + C.$$

(3) 令  $x = \frac{1}{t}$ , 则  $dx = -\frac{1}{t^2} dt$ , 于是

$$\int \frac{x+1}{x^2 \sqrt{x^2-1}} dx = \int \frac{\frac{1}{t} + 1}{\frac{1}{t^2} \sqrt{\frac{1}{t^2} - 1}} \left( -\frac{1}{t^2} \right) dt = -\int \frac{1+t}{\sqrt{1-t^2}} dt = -\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} - \int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ = -\arcsin t + \sqrt{1-t^2} + C = -\arcsin \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + C.$$

(4) 设  $x = \tan t$ , 则  $dx = \sec^2 t dt$ , 于是

$$\int \frac{dx}{(1+5x^2) \sqrt{1+x^2}} = \int \frac{\sec^2 t dt}{(1+5 \tan^2 t) \sec t} = \int \frac{\sec t dt}{1+5 \tan^2 t} = \int \frac{\frac{1}{\cos t}}{1+5 \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}} dt \\ = \int \frac{\cos t dt}{\cos^2 t + 5 \sin^2 t} = \int \frac{d \sin t}{1+4 \sin^2 t} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+4 \sin^2 t} d(2 \sin t) \\ = \frac{1}{2} \arctan(2 \sin t) + C = \frac{1}{2} \arctan \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$$

2. 设  $f(\sin^2 x) = \frac{x}{\sin x}$ , 求  $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} f(x) dx$ .

解 设  $u = \sin^2 x$ , 即  $\sin x = \sqrt{u}$ ,  $x = \arcsin \sqrt{u}$ , 则  $f(u) = \frac{\arcsin \sqrt{u}}{\sqrt{u}}$ , 即  $f(x) = \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ .

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} f(x) dx &= \int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx = \int \arcsin \sqrt{x} d(-2\sqrt{1-x}) = -2\sqrt{1-x} \arcsin \sqrt{x} + \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ &= -2\sqrt{1-x} \arcsin \sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C. \end{aligned}$$

#### 复习题 4

##### 1. 填空题

(1) 已知  $\varphi(x) = 2x + e^{-x}$  是  $f(x)$  的原函数, 是  $g(x)$  的导函数, 且  $g(0) = 1$ , 则  $f(x) =$  \_\_\_\_\_;  $g(x) =$  \_\_\_\_\_;

(2) 若  $f''(x)$  连续, 则  $\int x f''(x) dx =$  \_\_\_\_\_;

(3) 若  $d(\cos x) = f(x) dx$ , 则  $\int x f(x) dx =$  \_\_\_\_\_;

(4) 若  $f(x)$  可导, 则  $\int f(x) dx$  一定 \_\_\_\_\_;

(5) 若  $f(x)$  的某个原函数为常数, 则  $f(x)$  \_\_\_\_\_.

解 (1) 答案:  $2 - e^{-x}; x^2 - e^{-x} + 2$ .

因为  $\varphi(x) = 2x + e^{-x}$  是  $f(x)$  的原函数, 所以  $f(x) = \varphi'(x) = 2 - e^{-x}$ .  $\varphi(x) = 2x + e^{-x}$  是  $g(x)$  的导函数, 所以  $g(x) = \int \varphi(x) dx = x^2 - e^{-x} + C$ . 又  $g(0) = 1$ , 得  $C = 2$ , 于是  $g(x) = x^2 - e^{-x} + 2$ .

(2) 答案:  $xf'(x) - f(x) + C$ .

$$\int x f''(x) dx = \int x df'(x) = x f'(x) - \int f'(x) dx = x f'(x) - f(x) + C.$$

(3) 答案:  $x \cos x - \sin x + C$ .

若  $d(\cos x) = f(x) dx$ , 则  $f(x) = -\sin x$ , 于是

$$\int x f(x) dx = -\int x \sin x dx = x \cos x - \int \cos x dx = x \cos x - \sin x + C.$$

(4) 答案: 存在.

若  $f(x)$  可导, 则  $f(x)$  连续, 所以  $\int f(x) dx$  一定存在.

(5) 答案: 0.

若  $f(x)$  的某个原函数为常数, 则  $f(x) = (C)' = 0$ .

##### 2. 选择题

(1) 若  $\int f(x) dx = x^2 e^{2x} + C$ , 则  $f(x) =$  ( ).

A.  $2xe^{2x}$

B.  $2x^2 e^{2x}$

C.  $4xe^{2x}$

D.  $2xe^{2x}(1+x)$ .

(2) 若  $f(x)$  的一个原函数是  $\frac{\ln x}{x}$ , 则  $\int f'(x) dx =$  ( ).

A.  $\frac{\ln x}{x} + C$

B.  $\frac{1}{2} \ln^2 x + C$

C.  $\ln |\ln x| + C$

D.  $\frac{1 - \ln x}{x^2} + C$

(3) 原函数族  $f(x) + C$  可写成 ( ) 形式.

A.  $\int f'(x) dx$

B.  $\left[ \int f(x) dx \right]'$

C.  $d \int f(x) dx$

D.  $\int F'(x) dx$

(4) 若  $f'(x^2) = \frac{1}{x} (x > 0)$ , 则  $f(x) =$  ( ).

A.  $2x + C$

B.  $\ln |x| + C$

C.  $2\sqrt{x} + C$

D.  $\frac{1}{\sqrt{x}} + C$

(5) 若  $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ,  $F(1) = \frac{3}{2}\pi$ , 则  $F(x) =$  ( ).



A.  $\arcsin x$       B.  $\arcsin x + \frac{\pi}{2}$       C.  $\arccos x + \pi$       D.  $\arcsin x + \pi$

解 (1) 因为  $\int f(x) dx = x^2 e^{2x} + C$ , 所以  $f(x) = (x^2 e^{2x})' = 2xe^{2x}(1+x)$ , 故选 D.

(2) 因为  $f(x)$  的一个原函数是  $\frac{\ln x}{x}$ , 所以  $f(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ .

而  $f(x)$  又是  $f'(x)$  的一个原函数, 于是  $\int f'(x) dx = \frac{1 - \ln x}{x^2} + C$ , 故选 D.

(3) 因为  $\int f'(x) dx = f(x) + C$ , 所以选 A.

(4) 若  $f'(x^2) = \frac{1}{x} (x > 0)$ , 即  $f'(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ , 所以  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ , 于是  $f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$ , 故选 C.

(5) 因为  $F(x) = \int F'(x) dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$ . 又由  $F(1) = \frac{3}{2}\pi$ , 得  $C = \pi$ , 故选 D.

3. 若  $\int f'(e^x) dx = e^{2x} + C$ , 求  $f(x)$ .

解 因为  $\int f'(e^x) dx = e^{2x} + C$ , 所以  $f'(e^x) = (e^{2x})' = 2e^{2x}$ .

设  $t = e^x$ , 则  $f'(t) = 2t^2$ , 即  $f'(x) = 2x^2$ , 于是  $f(x) = \int f'(x) dx = \int 2x^2 dx = \frac{2}{3}x^3 + C$ .

4. 设  $\int xf(x) dx = \arcsin x + C$ , 求  $\int \frac{dx}{f(x)}$ .

解 因为  $\int xf(x) dx = \arcsin x + C$ , 所以  $xf(x) = (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ , 即  $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$ , 故

$$\int \frac{dx}{f(x)} = \int x \sqrt{1-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int \sqrt{1-x^2} d(1-x^2) = -\frac{1}{3} \sqrt{(1-x^2)^3} + C.$$

5. 设  $f(x^2-1) = \ln \frac{x^2}{x^2-2}$ , 且  $f[\varphi(x)] = \ln x$ , 求  $\int \varphi(x) dx$ .

解 因为  $f(x^2-1) = \ln \frac{x^2}{x^2-2} = \ln \frac{(x^2-1)+1}{(x^2-1)-1}$ , 所以  $f(t) = \ln \frac{t+1}{t-1}$ . 由  $f[\varphi(x)] = \ln x$ , 得

$f[\varphi(x)] = \ln \frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1} = \ln x$ , 即  $\frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1} = x$ , 解得  $\varphi(x) = \frac{x+1}{x-1}$ . 于是

$$\int \varphi(x) dx = \int \frac{x+1}{x-1} dx = \int \frac{(x-1)+2}{x-1} dx = \int \left(1 + \frac{2}{x-1}\right) dx = x + 2\ln|x-1| + C.$$

6. 求  $\int \left[ \frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{f^2(x)f''(x)}{f'^3(x)} \right] dx$ .

解  $\int \left[ \frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{f^2(x)f''(x)}{f'^3(x)} \right] dx = \int \left[ \frac{f(x)}{f'(x)} \cdot \frac{[f'^2(x) - f(x)f''(x)]}{f'^2(x)} \right] dx = \int \frac{f(x)}{f'(x)} d\left(\frac{f(x)}{f'(x)}\right)$   
 $= -\frac{1}{2} \left[ \frac{f(x)}{f'(x)} \right]^2 + C.$

7. 设  $f(\ln x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$ , 求  $\int f(x) dx$ .

解 设  $t = \ln x$ , 则  $x = e^t$ , 由此得  $f(t) = \frac{\ln(e^t+1)}{e^t}$ , 即  $f(x) = \frac{\ln(e^x+1)}{e^x}$ , 于是

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \frac{\ln(e^x+1)}{e^x} dx = \int \ln(e^x+1) d(-e^{-x}) = -e^{-x} \ln(e^x+1) + \int \frac{e^x}{e^x+1} e^{-x} dx \\ &= -\frac{\ln(e^x+1)}{e^x} + x - \ln(e^x+1) + C. \end{aligned}$$

8. 求下列不定积分:

$$\begin{aligned}
 (1) & \int \frac{x + \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx; & (2) & \int \frac{x^2}{4+9x^2} dx; & (3) & \int x(1+x)^{100} dx; & (4) & \int \frac{e^{-1/x^2}}{x^3} dx; \\
 (5) & \int \frac{2}{e^x + e^{-x}} dx; & (6) & \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}-x} dx; & (7) & \int \frac{2^x 3^x}{9^x - 4^x} dx; & (8) & \int \frac{dx}{x(2+x^{10})}; \\
 (9) & \int \frac{7\cos x - 3\sin x}{5\cos x + 2\sin x} dx; & (10) & \int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}; & (11) & \int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} dx; & (12) & \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^4}}.
 \end{aligned}$$

解 (1)  $\int \frac{x + \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} + \int \arccos x d\arccos x$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} (\arccos x)^2 + C.$$

$$\begin{aligned}
 (2) \int \frac{x^2}{4+9x^2} dx &= \frac{1}{9} \int \frac{(9x^2+4)-4}{4+9x^2} dx = \frac{1}{9} \left( \int dx - 4 \int \frac{1}{4+9x^2} dx \right) \\
 &= \frac{1}{9} \left( x - \frac{2}{3} \int \frac{1}{1+\left(\frac{3}{2}x\right)^2} d\left(\frac{3}{2}x\right) \right) = \frac{1}{9} \left[ x - \frac{2}{3} \arctan\left(\frac{3}{2}x\right) \right] + C.
 \end{aligned}$$

(3) 令  $1+x=u$ , 即  $x=u-1$ , 则  $dx=du$ , 于是

$$\begin{aligned}
 \int x(1+x)^{100} dx &= \int (u-1)u^{100} du = \int u^{101} du - \int u^{100} du = \frac{u^{102}}{102} - \frac{u^{101}}{101} + C \\
 &= \frac{1}{102} (1+x)^{102} - \frac{1}{101} (1+x)^{101} + C.
 \end{aligned}$$

$$(4) \int \frac{e^{-1/x^2}}{x^3} dx = \frac{1}{2} \int e^{-\frac{1}{x^2}} d\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{x^2}} + C.$$

$$(5) \int \frac{2}{e^x + e^{-x}} dx = \int \frac{2e^x}{e^{2x} + 1} dx = 2 \int \frac{d(e^x)}{e^{2x} + 1} = 2 \arctan e^x + C.$$

$$\begin{aligned}
 (6) \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}-x} dx &= \int x(\sqrt{x^2+1}+x) dx = \int x\sqrt{x^2+1} dx + \int x^2 dx \\
 &= \frac{1}{2} \int \sqrt{x^2+1} d(x^2+1) + \frac{1}{3} x^3 = \frac{1}{3} (\sqrt{x^2+1})^3 + \frac{1}{3} x^3 + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (7) \int \frac{2^x 3^x}{9^x - 4^x} dx &= \int \frac{2^x 3^x}{4^x \left[ \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 1 \right]} dx = \int \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\left[ \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 1 \right]} dx \\
 &= \frac{t - \left(\frac{3}{2}\right)^x}{\ln \frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{\ln 3 - \ln 2} \cdot \frac{1}{2} \ln \frac{t-1}{t+1} + C \\
 &= \frac{1}{2(\ln 3 - \ln 2)} \ln \left| \frac{3^x - 2^x}{3^x + 2^x} \right| + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (8) \int \frac{dx}{x(2+x^{10})} &= \int \frac{x^9 dx}{x^{10}(2+x^{10})} = \frac{1}{20} \int \left( \frac{1}{x^{10}} - \frac{1}{2+x^{10}} \right) d(x^{10}) \\
 &= \frac{1}{20} [\ln x^{10} - \ln(x^{10}+2)] + C = \frac{1}{2} \ln |x| - \frac{1}{20} \ln(x^{10}+2) + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (9) \int \frac{7\cos x - 3\sin x}{5\cos x + 2\sin x} dx &= \int \frac{(5\cos x + 2\sin x) + (2\cos x - 5\sin x)}{5\cos x + 2\sin x} dx = \int dx + \int \frac{d(5\cos x + 2\sin x)}{5\cos x + 2\sin x} \\
 &= x + \ln |5\cos x + 2\sin x| + C.
 \end{aligned}$$

(10) 方法一 令  $\sqrt{4-x^2}=t$ , 即  $x^2=4-t^2$ , 则  $x dx = -t dt$ , 于是

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{x dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{-t dt}{t(4-t^2)} = -\frac{1}{4} \ln \left| \frac{t-2}{t+2} \right| + C = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\sqrt{4-x^2}-2}{\sqrt{4-x^2}+2} \right| + C.$$



方法二 令  $x = 2\sin t$ , 则  $dx = 2\cos t dt$ , 于是

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{\cos t dt}{\sin t \cos t} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sin t} = \frac{1}{2} \ln |\csc t - \cot t| + C = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\sqrt{4-x^2}-2}{\sqrt{4-x^2}+2} \right| + C.$$

(11) 设  $x = 2\sec t$ , 则  $dx = 2\sec t \tan t dt$ , 于是

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} dx &= \int \frac{2\tan t \cdot 2\sec t \tan t}{2\sec t} dt = 2 \int \tan^2 t dt = 2 \int (\sec^2 t - 1) dt = 2\tan t - 2t + C \\ &= \sqrt{x^2-4} - 2\arccos \frac{2}{x} + C. \end{aligned}$$

(12) 设  $x^2 = \tan t$ , 则  $2x dx = \sec^2 t dt$ , 于是

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^4}} &= \int \frac{x dx}{x^2 \sqrt{1+x^4}} = \int \frac{\sec^2 t dt}{2\tan t \sec t} = \frac{1}{2} \int \csc t dt = \frac{1}{2} \ln |\csc t - \cot t| + C \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1+x^4}}{x^2} - \frac{1}{x^2} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1+x^4}-1}{x^2} \right| + C. \end{aligned}$$

9. 求下列不定积分:

$$\begin{aligned} (1) \int \frac{\ln(1+x^2)}{x^3} dx; & \quad (2) \int \frac{x^2}{1+x^2} \arctan x dx; & \quad (3) \int \frac{\ln \ln x}{x} dx; \\ (4) \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx; & \quad (5) \int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-3}} dx; & \quad (6) \int \frac{e^x(1+\sin x)}{1+\cos x} dx. \end{aligned}$$

解 (1)  $\int \frac{\ln(1+x^2)}{x^3} dx = \int \ln(1+x^2) d\left(-\frac{1}{2x^2}\right) = -\frac{\ln(1+x^2)}{2x^2} + \int \frac{x}{x^2(1+x^2)} dx$

$$\begin{aligned} &= -\frac{\ln(1+x^2)}{2x^2} + \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right) dx \\ &= -\frac{\ln(1+x^2)}{2x^2} + \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C \\ &= \ln \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{\ln(1+x^2)}{2x^2} + C. \end{aligned}$$

$$(2) \int \frac{x^2}{1+x^2} \arctan x dx = \int \arctan x dx - \int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} (\arctan x)^2 + C.$$

$$(3) \int \frac{\ln \ln x}{x} dx = \int \ln \ln x d \ln x = \ln x \ln \ln x - \int \ln x \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} dx = \ln x [\ln(\ln x) - 1] + C.$$

$$\begin{aligned} (4) \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx &= x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \int x d \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \\ &= x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \int x \cdot \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) dx \\ &= x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx \\ &= x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} d(1+x^2) \\ &= x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{x^2+1} + C. \end{aligned}$$

(5) 令  $\sqrt{e^x-3} = t$ , 即  $e^x = t^2+3$ ,  $x = \ln(t^2+3)$ , 则  $dx = \frac{2t}{t^2+3} dt$ , 于是

$$\begin{aligned} \int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-3}} dx &= \int \frac{\ln(t^2+3)(t^2+3)}{t} \cdot \frac{2t}{t^2+3} dt = 2 \int \ln(t^2+3) dt \\ &= 2[t \ln(t^2+3) - \int t d \ln(t^2+3)] = 2 \left[ t \ln(t^2+3) - \int \frac{2t^2}{t^2+3} dt \right] \\ &= 2t \ln(t^2+3) - 4 \int \frac{t^2+3-3}{t^2+3} dt = 2t \ln(t^2+3) - 4 \left( t - \int \frac{3}{t^2+3} dt \right) \end{aligned}$$

$$2x\sqrt{e^x-3}-4\sqrt{e^x-3}+4\sqrt{3}\arctan\frac{\sqrt{e^x-3}}{\sqrt{3}}+C.$$

$$\begin{aligned} (6) \int \frac{e^x(1+\sin x)}{1+\cos x} dx &= \int \frac{e^x}{1+\cos x} dx + \int e^x \frac{\sin x}{1+\cos x} dx = \int \frac{e^x}{2\cos^2 \frac{x}{2}} dx + \int e^x \frac{2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2\cos^2 \frac{x}{2}} dx \\ &= e^x \tan \frac{x}{2} - \int e^x \tan \frac{x}{2} dx + \int e^x \tan \frac{x}{2} dx = e^x \tan \frac{x}{2} + C. \end{aligned}$$

10. 设  $I_n = \int \tan^n x dx$ , 求证:  $I_n = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - I_{n-2}$ , 并求  $\int \tan^5 x dx$ .

$$\begin{aligned} \text{解 } I_n &= \int \tan^n x dx = \int \tan^{n-2} x \tan^2 x dx = \int \tan^{n-2} x (\sec^2 x - 1) dx \\ &= \int \tan^{n-2} x \sec^2 x dx - \int \tan^{n-2} x dx = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - I_{n-2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_5 &= \frac{1}{5-1} \tan^{5-1} x - I_{5-2} = \frac{1}{4} \tan^4 x - I_3 = \frac{1}{4} \tan^4 x - \left( \frac{1}{2} \tan^2 x - I_1 \right) \\ &= \frac{1}{4} \tan^4 x - \frac{1}{2} \tan^2 x + \int \tan x dx = \frac{1}{4} \tan^4 x - \frac{1}{2} \tan^2 x - \ln |\cos x| + C. \end{aligned}$$

11. 求下列不定积分:

$$(1) \int \frac{3x-1}{x^2-4x+8} dx;$$

$$(2) \int \frac{x^{11} dx}{x^8+3x^4+2};$$

$$(3) \int \frac{1-x^8}{x(1+x^8)} dx;$$

$$(4) \int \frac{x}{(x^2+1)(x^2+4)} dx;$$

$$(5) \int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x+1)};$$

$$(6) \int \frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} dx;$$

$$(7) \int \frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2-2}} dx;$$

$$(8) \int \cos \sqrt{3x+2} dx;$$

$$(9) \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+1}} dx;$$

$$(10) \int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x \ln x} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } (1) \int \frac{3x-1}{x^2-4x+8} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{6x-2}{x^2-4x+8} dx = \frac{1}{2} \int \frac{6x-12+10}{x^2-4x+8} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{3(2x-4)}{x^2-4x+8} dx + \int \frac{5}{x^2-4x+8} dx \\ &= \frac{3}{2} \int \frac{d(x^2-4x+8)}{x^2-4x+8} dx + \int \frac{5}{(x-2)^2+4} d(x-2) \\ &= \frac{3}{2} \ln |x^2-4x+8| + \frac{5}{2} \arctan \frac{x-2}{2} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \int \frac{x^{11}}{x^8+3x^4+2} dx &= \int \frac{(x^{11}+3x^7+2x^3)-(3x^7+2x^3)}{x^8+3x^4+2} dx = \int x^3 dx - \int \frac{3x^7+2x^3}{x^8+3x^4+2} dx \\ &= \int x^3 dx - \int \frac{3x^7+2x^3}{(x^4+1)(x^4+2)} dx = \int x^3 dx + \int \left( \frac{x^3}{x^4+1} - \frac{4x^3}{x^4+2} \right) dx \\ &= \frac{x^4}{4} + \frac{1}{4} \int \frac{d(x^4+1)}{x^4+1} - \int \frac{d(x^4+2)}{x^4+2} \\ &= \frac{x^4}{4} + \frac{1}{4} \ln(x^4+1) - \ln(x^4+2) + C = \frac{1}{4} x^4 + \ln \frac{\sqrt[4]{x^4+1}}{x^4+2} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \int \frac{1-x^8}{x(1+x^8)} dx &= \int \frac{(1-x^8)x^7}{x^8(1+x^8)} dx = \frac{1}{8} \int \frac{1-x^8}{x^8(1-x^8)} d(x^8) = \frac{1}{8} \int \left( \frac{1}{x^8} - \frac{2}{x^8+1} \right) d(x^8) \\ &= \frac{1}{8} \ln x^8 - \frac{2}{8} \ln(x^8+1) + C = \ln |x| - \frac{1}{4} \ln(1+x^8) + C. \end{aligned}$$

$$(4) \int \frac{x}{(x^2+1)(x^2+4)} dx = \int \frac{1}{3} \left( \frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{x^2+4} \right) dx = \frac{1}{3} \left( \int \frac{x}{x^2+1} dx - \int \frac{x}{x^2+4} dx \right)$$

$$= \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} - \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+4)}{x^2+4} \right] \\ = \frac{1}{6} \ln(x^2+1) - \frac{1}{6} \ln(x^2+4) + C = \frac{1}{6} \ln \left( \frac{x^2+1}{x^2+4} \right) + C.$$

$$(5) \int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x+1)} = \int \left( \frac{-x}{x^2+1} + \frac{x+1}{x^2+x+1} \right) dx \\ = -\frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} + \frac{1}{2} \int \frac{2x+1+1}{x^2+x+1} dx \\ = -\frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) + \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \\ = \frac{1}{2} \ln \frac{x^2+x+1}{x^2+1} + \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

$$(6) \int \frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} dx = \int \sqrt{x(x+1)}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) dx = \int [(x+1)\sqrt{x}-x\sqrt{x+1}] dx \\ = \int x^{\frac{3}{2}} dx + \int x^{\frac{1}{2}} dx - \int (x+1)^{\frac{3}{2}} dx + \int (x+1)^{\frac{1}{2}} dx \\ = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} (x+1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} (x+1)^{\frac{3}{2}} + C.$$

(7) 令  $t = x-1$ , 再令  $t = \frac{1}{u}$ , 则

$$\int \frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2-2}} dx = \int \frac{dt}{t\sqrt{t^2+2t-1}} = -\int \frac{du}{\sqrt{1+2u-u^2}} = -\int \frac{d(u-1)}{\sqrt{2-(u-1)^2}} \\ = -\arcsin \frac{u-1}{\sqrt{2}} + C = -\arcsin \frac{2-x}{\sqrt{2}(x-1)} + C.$$

(8) 令  $\sqrt{3x+2} = t$ , 即  $x = \frac{1}{3}(t^2-2)$ , 则  $dx = \frac{2}{3}t dt$ , 于是

$$\int \cos \sqrt{3x+2} dx = \int \cos t \cdot \frac{2}{3}t dt = \frac{2}{3} \int t d(\sin t) = \frac{2}{3} \left( t \sin t - \int \sin t dt \right) = \frac{2}{3} (t \sin t + \cos t) + C \\ = \frac{2}{3} (\sqrt{3x+2} \sin \sqrt{3x+2} + \cos \sqrt{3x+2}) + C.$$

(9) 令  $\sqrt[4]{x} = t$ , 即  $x = t^4$ , 则  $dx = 4t^3 dt$ , 于是

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+1}} dx = \int \frac{t^2}{t^3+1} \cdot 4t^3 dt = 4 \int \frac{t^5}{t^3+1} dt = 4 \int \frac{t^5+t^2-t^2}{t^3+1} dt = 4 \int t^2 dt - 4 \int \frac{t^2}{t^3+1} dt \\ = \frac{4}{3} t^3 - \frac{4}{3} \int \frac{d(t^3+1)}{t^3+1} = \frac{4}{3} t^3 - \frac{4}{3} \ln(t^3+1) + C \\ = \frac{4}{3} [\sqrt[4]{x^3} - \ln(\sqrt[4]{x^3}+1)] + C.$$

(10) 令  $t = \ln x$ , 则  $dt = \frac{1}{x} dx$ , 于是  $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x \ln x} dx = \int \frac{\sqrt{1+t}}{t} dt$ .

再令  $u = \sqrt{1+t}$ , 即  $t = u^2-1$ , 则  $dt = 2u du$ , 于是

$$\int \frac{\sqrt{1+t}}{t} dt = 2 \int \frac{u^2}{u^2-1} du = 2 \int \frac{u^2-1+1}{u^2-1} du = 2 \left( \int du + \int \frac{1}{u^2-1} du \right) \\ = 2u + \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| + C = 2\sqrt{1+t} + \ln \left| \frac{\sqrt{1+t}-1}{\sqrt{1+t}+1} \right| + C.$$

所以,  $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x \ln x} dx = 2\sqrt{1+\ln x} + \ln \left| \frac{\sqrt{1+\ln x}-1}{\sqrt{1+\ln x}+1} \right| + C.$



12. 求  $\int \frac{\arcsin \sqrt{x} + \ln x}{\sqrt{x}} dx$ .

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{\arcsin \sqrt{x} + \ln x}{\sqrt{x}} dx &= 2 \int (\arcsin \sqrt{x} + 2 \ln \sqrt{x}) d\sqrt{x} \\ &\stackrel{t=\sqrt{x}}{=} 2 \int (\arcsin t + 2 \ln t) dt = 2 \left[ t \arcsin t - \int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt + 2t \ln t - 2 \int dt \right] \\ &= 2[t \arcsin t + \sqrt{1-t^2} + 2t \ln t - 2t] + C \\ &= 2[\sqrt{x} \arcsin \sqrt{x} + \sqrt{1-x} + \sqrt{x} \ln x - 2\sqrt{x}] + C. \end{aligned}$$

13. 设  $f(x)$  的一个原函数  $F(x) > 0$ , 且  $F(0) = 1$ . 当  $x \geq 0$  时,  $f(x)F(x) = \sin^2 2x$ , 求  $f(x)$ .

$$\text{解} \quad \int f(x)F(x)dx = \int \sin^2 2x dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{8} \sin 4x + C_1.$$

$$\text{又} \int f(x)F(x)dx = \int F(x)dF(x) = \frac{1}{2}F^2(x) + C_2, \text{从而 } F^2(x) = x - \frac{1}{4} \sin 4x + C (C = 2C_1 - 2C_2).$$

$$\text{代入 } F(0) = 1, \text{得 } C = 1, \text{即 } F^2(x) = x - \frac{1}{4} \sin 4x + 1. \text{而 } F(x) > 0, \text{于是 } F(x) = \sqrt{x - \frac{1}{4} \sin 4x + 1},$$

$$\text{即 } f(x) = F'(x) = \frac{1 - \cos 4x}{2 \sqrt{x - \frac{1}{4} \sin 4x + 1}}.$$

#### 自测题 4 答案

##### 1. 填空题

$$\text{解} \quad (1) \text{ 因为 } e^{-x} \text{ 是函数 } f(x) \text{ 的一个原函数, 所以 } \int f(x)dx = e^{-x} + C.$$

$$(2) \text{ 因为 } \int f(x)dx = 2 \cos \frac{x}{2} + C, \text{ 所以 } f'(x) = \left( 2 \cos \frac{x}{2} \right)' = -\sin \frac{x}{2}.$$

$$(3) \int f'(x)dx = f(x) + C = \frac{1}{x} + C.$$

$$(4) \int f(x)df(x) = \frac{1}{2}f^2(x) + C.$$

$$(5) \int \sin x \cos x dx = \int \sin x d \sin x = \frac{\sin^2 x}{2} + C.$$

##### 2. 单项选择题

$$\text{解} \quad (1) \text{ 因为 } \int f(x)dx = \frac{3}{4} \ln \sin 4x + C, \text{ 所以 } f(x) = \left( \frac{3}{4} \ln \sin 4x \right)' = \frac{3}{4} \frac{\cos 4x}{\sin 4x} \cdot 4 = 3 \cot 4x, \text{ 故选 D.}$$

$$(2) \text{ 因为 } \int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x d \ln x = \frac{\ln^2 x}{2} + C, \text{ 所以选 B.}$$

$$(3) d \left[ \int f(x)dx \right] = df(x), \text{ 故 B 错; } \int f'(x)dx = f(x) + C, \text{ 故 C 错; } \int df(x) = f(x) + C, \text{ 故 D 错; 而 } \left[ \int f(x)dx \right]' = f(x) \text{ 正确. 故选 A.}$$

$$(4) d(\sqrt{x}) = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \text{ 故 B 错; } d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} dx, \text{ 故 C 错; } d\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} dx, \text{ 故 D 错; } d \sin^2 x =$$

$$2 \sin x \cos x dx = \sin 2x dx, \text{ 故选 A.}$$

$$(5) \int x f(1-x^2) dx = -\frac{1}{2} \int f(1-x^2) d(1-x^2) = -\frac{1}{2} (1-x^2)^2 + C, \text{ 故选 D.}$$

##### 3. 计算题

$$\text{解} \quad (1) \int \frac{1}{9-4x^2} dx = \frac{1}{6} \int \left( \frac{1}{3+2x} + \frac{1}{3-2x} \right) dx$$

$$= -\frac{1}{6} \left( \frac{1}{2} \ln |3+2x| - \frac{1}{2} \ln |3-2x| \right) + C = \frac{1}{12} \ln \frac{3+2x}{3-2x} + C.$$

(2) 设  $\sqrt[6]{x} = t$ , 即  $x = t^6$ , 则  $dx = 6t^5 dt$ , 于是

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx &= \int \frac{6t^5}{t^3 + t^2} dt = 6 \int \frac{t^3}{t+1} dt = 6 \int \frac{t^3 + 1 - 1}{t+1} dt = 6 \int \left( t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1} \right) dt \\ &= 6 \left( \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln |t+1| \right) + C = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln(1 + \sqrt[6]{x}) + C. \end{aligned}$$

(3) 设  $x = 2\sec t$ , 则  $dx = 2\sec t \tan t dt$ , 于是

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x} dx &= \int \frac{2\tan t}{2\sec t} 2\sec t \tan t dt = 2 \int \tan^2 t dt = 2 \int (\sec^2 t - 1) dt \\ &= 2(\tan t - t) + C = \sqrt{x^2 - 4} - 2\arccos \frac{2}{x} + C. \end{aligned}$$

(4) 令  $u = \arcsin x$ ,  $dv = dx$ , 则

$$\begin{aligned} \int \arcsin x dx &= x \arcsin x - \int x d(\arcsin x) = x \arcsin x - \int x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= x \arcsin x + \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} d(1-x^2) = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5) \int \frac{x + \arctan x}{1+x^2} dx &= \int \left( \frac{x}{1+x^2} + \frac{\arctan x}{1+x^2} \right) dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^2} d(1+x^2) + \int \arctan x d\arctan x \\ &= \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \frac{1}{2} \arctan^2 x + C. \end{aligned}$$

$$(6) \int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)} dx = \int \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1+x^2} \right) dx = -\frac{1}{x} + \arctan x + C.$$

#### 4. 综合题

解 (1) 由题意得  $y' = x + e^x$ , 故

$$y = \int (x + e^x) dx = \frac{x^2}{2} + e^x + C.$$

由  $y(0) = 1 + C = 2$ , 得  $C = 1$ , 故该曲线方程为  $y = \frac{x^2}{2} + e^x + C$ .

$$(2) \text{ 由题意得 } R(x) = \int (100 - 10x) dx = 100x - 5x^2 + C.$$

由  $R(0) = 0$ , 得  $C = 0$ . 而  $R(x) = P(x)x$ , 即  $100x - 5x^2 = P(x)x$ , 从而得价格函数  $P(x) = 100 - 5x$ .

## 5.1 大纲要求及重点内容

### 1. 大纲要求

(1) 理解定积分的概念和基本性质,牢固掌握定积分概念,理解定积分是一种和式的极限,对用定积分解决问题的思想有初步体会.

(2) 理解变上限积分定义的函数及其求导,掌握牛顿-莱布尼茨公式,理解定积分和不定积分、微分和积分间的联系.

(3) 掌握定积分的换元法与分部积分法.

(4) 了解反常积分的概念并会计算反常积分.

(5) 理解定积分的来源、几何意义(平面图形的面积、旋转体的体积及侧面积、平行截面面积为已知的立体体积).

### 2. 重点内容

(1) 定积分的计算、证明;

(2) 变上限积分的导数;

(3) 通过微元法求解应用问题,特别是求曲线围成的面积和旋转体的体积.

## 5.2 内容精要

1. 基本概念 定积分的定义  $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ .

### 2. 几何意义

若  $f(x) \geq 0$ , 则  $\int_a^b f(x)dx$  表示由  $x = a, x = b, y = f(x), x$  轴围成的图形的面积.

### 3. 基本性质

性质 1  $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$ .

性质 2  $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$  ( $k$  为常数).

性质 3  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ .



性质4  $\int_a^b 1 \cdot dx = \int_a^b dx = b - a.$

性质5 若在区间 $[a, b]$ 上有 $f(x) \leq g(x)$ , 则 $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx (a < b).$

推论1 若在区间 $[a, b]$ 上 $f(x) \geq 0$ , 则 $\int_a^b f(x) dx \geq 0 (a < b).$

推论2  $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx (a < b).$

性质6(估值定理) 设 $M$ 及 $m$ 分别是函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的最大值及最小值, 则

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

性质7(定积分中值定理) 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则在 $[a, b]$ 上至少存在一个点 $\xi$ , 使得

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a) \quad (a \leq \xi \leq b).$$

#### 4. 基本定理

(1) (牛顿-莱布尼茨公式)  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ , 其中 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数.

(2) 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,  $x \in [a, b]$ , 则变上限函数 $\int_a^x f(t) dt$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 即 $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$ .

(3) 推论  $\frac{d}{dx} \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt = f[v(x)]v'(x) - f[u(x)]u'(x).$

#### 5. 公式

(1) 设 $f(x)$ 在 $[-l, l]$ 上连续, 则

$$\int_{-l}^l f(x) dx = 0 (f(x) \text{ 奇函数}); \quad \int_{-l}^l f(x) dx = 2 \int_0^l f(x) dx (f(x) \text{ 偶函数}).$$

(2) 设 $f(x)$ 是以 $T$ 为周期的连续函数,  $a$ 为任意的实数, 则 $\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx.$

$$(3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, & \text{当 } n \text{ 为偶数,} \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3} \cdot 1, & \text{当 } n \text{ 为奇数.} \end{cases}$$

$$(4) \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{\pi a^2}{4}.$$

#### 6. 反常积分

(1) 无限区间上的反常积分

① 设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续, 则 $\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx.$

② 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, b]$ 上连续, 则 $\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx.$

③ 设  $f(x)$  在  $(-\infty, \infty)$  上连续, 则  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b f(x) dx$ .

若以上极限存在, 则称反常积分收敛, 否则称反常积分发散.

(2) 无界函数的反常积分

① 设函数  $f(x)$  在  $[a, b)$  上连续,  $b$  为瑕点. 对任意的  $\epsilon > 0$  且  $b - \epsilon > a$ , 如果  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x) dx$  存在, 称极限  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x) dx$  为无界函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的反常积分.

② 若函数  $f(x)$  在  $(a, b]$  上连续, 且  $a$  为瑕点, 则定义无界函数的反常积分为

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx.$$

③ 若函数  $f(x)$  在  $[a, c), (c, b]$  内连续,  $x = c$  为  $f(x)$  瑕点, 则定义无界函数的积分为

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0^+} \int_a^{c-\epsilon_1} f(x) dx + \lim_{\epsilon_2 \rightarrow 0^+} \int_{c+\epsilon_2}^b f(x) dx.$$

## 7. 定积分的应用

(1) 微元法 在  $[a, b]$  上的任意子区间  $[u, u+du]$  上建立所求量的微分  $dM$  与某一函数  $f(u)$  及自变量  $u$  的微分  $du$  之间的关系式:  $dM = f(u)du$ , 其中  $dM$  表示  $M$  的微元,  $f(u)du$  是所求量的局部表达式.

(2) 求平面图形的面积

I. 直角坐标系中平面图形的面积  $S = \int_a^b f(x) dx$ ;

II. 边界曲线为参数方程  $L: \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} t_1 \leq t \leq t_2$  的图形的面积  $S = \int_a^b y dx = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t) \varphi'(t) dt$ , 当  $x = a$  时的  $t$  值做  $\int_{t_1}^{t_2} \psi(t) \varphi'(t) dt$  的下限, 当  $x = b$  时的  $t$  值做  $\int_{t_1}^{t_2} \psi(t) \varphi'(t) dt$  的上限.

(3) 旋转体的体积  $V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx, V_y = \pi \int_c^d \varphi^2(y) dy$ .

注 ① 图形绕着平行于  $x$  轴的直线旋转的体积仍然对  $x$  积分; 绕着平行于  $y$  轴的直线旋转的体积仍然对  $y$  积分.

② 如果曲线是  $y = f(x)$  的图形, 由  $0 \leq y \leq f(x), a \leq x \leq b$  绕着  $y$  轴旋转的体积

$$V_y = 2\pi \int_a^b x f(x) dx.$$

(4) 旋转体的侧面积  $y = f(x) \geq 0, a \leq x \leq b, S_{\text{侧}} = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1+f'^2(x)} dx$ .

## 5.3 题型总结与典型例题

### 题型 5-1 利用定积分求数列的极限

【解题思路】 根据定积分定义, 它是  $n$  项和的极限, 因此如果某数列的通项是  $n$  项和的形式时, 可以用定积分来计算这样数列的极限. 利用定积分的定义, 求某些数列的极限, 关键是找到适当的被积函数和积分区间.



例 5.1 求极限: (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} (\sqrt{n} + \sqrt{2n} + \cdots + \sqrt{n^2})$ ; (2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{e^{\frac{k}{n}}}{n + ne^{\frac{2k}{n}}}$ .

解 (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} (\sqrt{n} + \sqrt{2n} + \cdots + \sqrt{n^2}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + \cdots + \sqrt{\frac{n}{n}} \right)$   
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}} = \int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{e^{\frac{k}{n}}}{n + ne^{\frac{2k}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{e^{\frac{k}{n}}}{1 + e^{\frac{2k}{n}}} \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx = \arctan e^x \Big|_0^1 = \arctan e - \frac{\pi}{4}.$

### 题型 5-2 定积分的几何意义

【解题思路】 从定积分的具体表达式找被积函数和积分区间, 然后根据被积函数和积分区间确定该定积分表示的平面图形的面积.

例 5.2 利用定积分的几何意义求下列定积分:

(1)  $\int_0^2 (2-x) dx$ ; (2)  $\int_0^1 \sqrt{2x-x^2} dx.$

解 (1)  $\int_0^2 (2-x) dx$  表示直线  $x+y=2$  与  $x$  轴、 $y$  轴所围成的三角形的面积, 于是

$$\int_0^2 (2-x) dx = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2.$$

(2)  $\int_0^1 \sqrt{2x-x^2} dx$  表示圆  $(x-1)^2 + y^2 = 1$  的四分之一面积, 即  $\frac{\pi}{4}.$

### 题型 5-3 有关定积分的性质问题

【解题思路】 若在区间  $[a, b]$  上有  $f(x) \leq g(x)$ , 则  $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ . 利用定积分的比较性质比较两个定积分值的大小, 主要是比较被积函数在积分区间上的大小. 设  $M$  及  $m$  分别是函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上的最大值和最小值, 则  $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$ . 利用定积分的估值性质来估计定积分值的大小, 主要是求被积函数在积分区间上的最大值和最小值.

例 5.3  $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{x} dx, I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\tan x} dx$ , 则( ).

A.  $I_1 > I_2 > 1$  B.  $1 > I_1 > I_2$  C.  $I_2 > I_1 > 1$  D.  $1 > I_2 > I_1$

解 在  $(0, \frac{\pi}{4})$  内  $\tan x > x$ , 因为  $I_1 - I_2 = \frac{\tan^2 x - x^2}{x \tan x} > 0$ , 所以排除 C, D.

又因为  $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\tan x} dx < \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx = \frac{\pi}{4} < 1$ , 所以排除 A. 故选 B.

例 5.4 估计下列各积分值:

(1)  $\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} x \arctan x dx$ ; (2)  $\int_2^0 e^{x-x^2} dx.$

解 (1) 设  $f(x) = x \arctan x, x \in \left[ \frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3} \right]$ . 因为当  $x \in \left[ \frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3} \right]$  时  $f'(x) = \arctan x +$

$\frac{x}{1+x^2} > 0$ , 所以  $f(x)$  单调递增, 于是



$$\max f(x) = f(\sqrt{3}) = \sqrt{3} \arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}, \quad \min f(x) = f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}\pi}{18},$$

因此  $\frac{\sqrt{3}\pi}{18} \leq f(x) \leq \frac{\pi}{\sqrt{3}}$ , 即  $\frac{\pi}{9} \leq \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} x \arctan x dx \leq \frac{2\pi}{3}$ .

(2) 设  $f(x) = e^{x-x^2}$ ,  $x \in [0, 2]$ . 因为  $f'(x) = (1-2x)e^{x-x^2}$ , 令  $f'(x) = 0$ , 得  $x = \frac{1}{2}$ . 而  $f\left(\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{1}{4}}$ ,  $f(0) = 1$ ,  $f(2) = e^{-2}$ , 所以  $f(x)$  在  $[0, 2]$  上有最小值为  $e^{-2}$ , 最大值为  $e^{\frac{1}{4}}$ , 故

$$2e^{-2} \leq \int_0^2 e^{x-x^2} dx \leq 2e^{\frac{1}{4}}, \quad \text{即} \quad -2e^{\frac{1}{4}} \leq \int_2^0 e^{x-x^2} dx \leq -2e^{-2}.$$

#### 题型 5-4 定积分中值定理的应用

**【解题思路】** 如果函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 则在  $[a, b]$  上至少存在一个点  $\xi$ , 使得  $\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a)$  ( $a \leq \xi \leq b$ ). 利用定积分的中值定理可以求极限、证明等式以及不等式问题.

**例 5.5** 设  $f(x)$  可导, 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ , 求  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+2} t \sin \frac{3}{t} f(t) dt$ .

**解** 由积分中值定理知有  $\xi \in [x, x+2]$ , 使  $\int_x^{x+2} t \sin \frac{3}{t} f(t) dt = \xi \sin \frac{3}{\xi} f(\xi)(x+2-x)$ , 所以  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+2} t \sin \frac{3}{t} f(t) dt = 2 \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \xi \sin \frac{3}{\xi} f(\xi) = 2 \lim_{\xi \rightarrow +\infty} 3f(\xi) = 6$ .

**例 5.6** 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 在  $(0, 1)$  内可导, 且满足  $f(1) = k \int_0^{\frac{1}{k}} x e^{1-x} f(x) dx$  ( $k > 1$ ), 证明至少存在一点  $\xi \in (0, 1)$ , 使得  $f'(\xi) = (1 - \xi^{-1})f(\xi)$ .

**证明** 由定积分的中值定理知, 存在  $x_0 \in \left(0, \frac{1}{k}\right)$ , 使得

$$k \int_0^{\frac{1}{k}} x e^{1-x} f(x) dx = k x_0 e^{1-x_0} f(x_0) \cdot \frac{1}{k} = x_0 e^{1-x_0} f(x_0), \text{ 于是 } f(1) = x_0 e^{1-x_0} f(x_0).$$

设  $F(x) = x e^{1-x} f(x)$ , 则  $F(x)$  在  $[x_0, 1]$  上连续, 在  $(x_0, 1)$  内可导, 且  $F'(x) = e^{1-x} f(x) - x e^{1-x} f(x) + x e^{1-x} f'(x)$ , 于是  $F(1) = f(1) = x_0 e^{1-x_0} f(x_0) = F(x_0)$ , 所以, 由罗尔定理知, 存在  $\xi \in (x_0, 1) \subset (0, 1)$ , 使得  $F'(\xi) = 0$ , 即  $e^{1-\xi} [f(\xi) - \xi f(\xi) + \xi f'(\xi)] = 0$ , 解得

$$f'(\xi) = (1 - \xi^{-1})f(\xi).$$

#### 题型 5-5 关于变上、下限积分的求导问题

**【解题思路】** 利用公式  $\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{\beta(x)} f(t) dt = f(\beta(x))\beta'(x) - f(a(x))a'(x)$ , 可以求变上、

下限积分的导数. 如果被积函数中也含有变量  $x$ , 要么设法把  $x$  拿到积分号外面, 要么通过变量代换把  $x$  换到积分的上、下限去. 如果隐函数或参数方程所表示的函数中有变上、下限积分, 同样方法处理.

**例 5.7** 设  $f(x)$  连续, 求函数  $F(x) = \int_0^x (x-t)f(t)dt$  的导数.

**解** 因为  $F(x) = \int_0^x (x-t)f(t)dt = x \int_0^x f(t)dt - \int_0^x t f(t)dt$ , 所以

$$F'(x) = \int_0^x f(t) dt + xf(x) - xf(x) - \int_0^x f(t) dt.$$

**例 5.8** 设  $f(x)$  连续,  $\varphi(x) = \int_0^1 f(x^2+t) dt$ , 求  $\varphi'(x)$ .

**解** 因为  $\varphi(x) = \int_0^1 f(x^2+t) dt \xrightarrow{u=x^2+t} \int_{x^2}^{x^2+1} f(u) du$ , 所以

$$\varphi'(x) = 2xf(x^2+1) - 2xf(x^2) = 2x[f(x^2+1) - f(x^2)].$$

#### 题型 5-6 带有变上、下限积分的未定式极限的计算

**【解题思路】** 未定式极限的计算中如果有变上、下限积分, 一般用洛必达法则, 把含有变上、下限积分的部分作为分子或分母, 求导后可去掉积分号. 如果积分号里面有变量, 要提到积分号外或通过换元变到积分上、下限, 然后再求导.

**例 5.9** 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} te^t \sin t dt}{x^6 e^x}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \int_0^x e^{t^2} dt}{x^2 \sin 2x}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } (1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} te^t \sin t dt}{x^6 e^x} & \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 e^{x^2} \sin(x^2) \cdot 2x}{6x^5 e^x + x^6 e^x} = \frac{\sin x^2 \sim x^2}{\sim} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^5 e^{x^2}}{x^5 (6+x) e^x} \\ & = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{x^2}}{(6+x)e^x} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

(2) 由洛必达法则及无穷小的替代法, 得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \int_0^x e^{t^2} dt}{x^2 \sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \int_0^x e^{t^2} dt}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{x^2}}{6x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2xe^{x^2}}{12x} = -\frac{1}{6}.$$

#### 题型 5-7 含有“变上限积分”或“定积分”的方程

**【解题思路】** 含有“变上限积分”的方程, 通常对方程两边求导或多次求导, 求  $f(x)$ . 含有“定积分”的方程, 通常采取两边积分的方法求  $f(x)$ .

**例 5.10** 设  $f(x)$  为连续函数, 且  $\int_0^{2x} xf(t) dt + 2 \int_x^0 tf(2t) dt = 2x^3(x-1)$ , 求  $f(x)$ .

**解** 把  $\int_0^{2x} xf(t) dt + 2 \int_x^0 tf(2t) dt = 2x^3(x-1)$  两边对  $x$  求导, 得

$$\int_0^{2x} f(t) dt + 2xf(2x) - 2xf(2x) = 8x^3 - 6x^2, \quad \text{即} \quad \int_0^{2x} f(t) dt = 8x^3 - 6x^2.$$

把上式两边再对  $x$  求导, 得  $2f(2x) = 24x^2 - 12x$ , 即  $f(2x) = 12x^2 - 6x$ . 于是

$$f(x) = 3x^2 - 3x.$$

**例 5.11** 已知  $f(x)$  满足方程  $f(x) = 3x - \sqrt{1-x^2} \int_0^1 f^2(x) dx$ , 求  $f(x)$ .

**解** 设  $\int_0^1 f^2(x) dx = C$ , 则  $f(x) = 3x - C\sqrt{1-x^2}$ , 于是  $\int_0^1 (3x - C\sqrt{1-x^2})^2 dx = C$ .

积分得  $3 + \frac{2}{3}C^2 - 2C = C$ , 从而得  $C = 3$  或  $C = \frac{3}{2}$ . 所以

$$f(x) = 3x - 3\sqrt{1-x^2}, \quad \text{或} \quad f(x) = 3x - \frac{3}{2}\sqrt{1-x^2}.$$



### 题型 5-8 用换元法计算定积分

**【解题思路】** 定积分的换元法与不定积分的换元积分法类似,但在作定积分换元  $x = \varphi(t)$  时还应注意: ①  $x = \varphi(t)$  应为区间  $[\alpha, \beta]$  上的单值且有连续导数的函数; ② 换限要伴随换元同时进行; ③ 求出新的被积函数的原函数后,无须再回代成原来变量,只要把相应的积分限代入计算即可.

**例 5.12** 求下列定积分:

$$(1) \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}; \quad (2) \int_0^6 \frac{1}{\sqrt[3]{(4-x)^2}} dx; \quad (3) \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx.$$

**解** (1) 令  $x = \tan t$ , 则  $dx = \sec^2 t dt$ , 于是

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 t dt}{(1+\tan^2 t)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}.$$

(2) 令  $t = \sqrt[3]{4-x}$ , 即  $x = 4-t^3$ , 则  $dx = -3t^2 dt$ , 且当  $x=0$  时,  $t = \sqrt[3]{4}$ , 当  $x=6$  时,  $t = \sqrt[3]{2}$ . 于是  $\int_0^6 \frac{1}{\sqrt[3]{(4-x)^2}} dx = \int_{\sqrt[3]{4}}^{\sqrt[3]{2}} \frac{-3t^2 dt}{t^2} = 3(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2})$ .

$$\begin{aligned} (3) \text{ 方法一 } \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx & \xrightarrow{x=t^2} 2 \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \frac{\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}} dt = 2 \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \arcsin t d\arcsin t \\ & = \arcsin^2 t \Big|_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 = \frac{3\pi^2}{16}. \end{aligned}$$

$$\text{方法二 } \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx \xrightarrow{x=\sin^2 u} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{u \cdot 2 \sin u \cos u}{\sin u \cos u} du = u^2 \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi^2}{16}.$$

### 题型 5-9 用定积分的换元法证明等式

**【解题思路】** 用定积分的换元法证明等式,要根据被积函数上、下限的特点及其构成情况来选择证明. ① 若等式的一端为被积函数  $f(x)$ , 另一端为  $f[\varphi(t)]$ , 则令  $x = \varphi(t)$  进行换元; ② 若等式的一端为  $f(x)$ , 另一端也为  $f(x)$  或  $f(u)$ , 则从积分上、下限出发寻找换元; ③ 若被积函数含有三角函数, 一般从诱导公式出发, 兼顾  $f(x)$  与上、下限进行换元.

**例 5.13** 证明以下各题:

$$(1) \int_0^a x^3 f(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{a^2} x f(x) dx \quad (a > 0); \quad (2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^m x dx = 2^{-m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x dx.$$

**证明** (1) 令  $u = x^2$ , 则  $du = 2x dx$ , 于是

$$\int_0^a x^3 f(x^2) dx = \int_0^a x^2 f(x^2) x dx = \frac{1}{2} \int_0^{a^2} u f(u) du = \frac{1}{2} \int_0^{a^2} x f(x) dx.$$

$$(2) \text{ 左边 } = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2^m} \sin^m 2x dx = 2^{-m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m 2x dx.$$

令  $2x = \frac{\pi}{2} - t$ , 即  $x = \frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}$ , 则

$$\text{左边} = 2^{-m} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^m t \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) dt = 2^{-m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m t dt = \text{右边}.$$



### 题型 5-10 用定积分的换元法证明不等式

**【解题思路】** 定积分不等式的证明通常用定积分的比较定理、估值不等式、积分上限函数的单调性、微分与积分中值定理、泰勒公式等. 有时要构造辅助函数  $F(x)$ , 求  $F(x)$  的导数, 讨论  $F(x)$  的单调性, 并与  $F(x)$  的端点值比较, 从而得出不等式. 涉及更高阶导数用泰勒公式证明.

**例 5.14** 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且  $f(x) > 0$ , 求证  $\int_a^b f(x) dx \int_a^b \frac{1}{f(x)} dx \geq (b-a)^2$ .

**证明** 设  $F(t) = \int_a^t f(x) dx \int_a^t \frac{1}{f(x)} dx - (t-a)^2$ , 则

$$\begin{aligned} F'(t) &= f(t) \int_a^t \frac{1}{f(x)} dx + \frac{1}{f(t)} \int_a^t f(x) dx - 2(t-a) = \int_a^t \left[ \frac{f(t)}{f(x)} + \frac{f(x)}{f(t)} - 2 \right] dx \\ &= \int_a^t \left[ \sqrt{\frac{f(t)}{f(x)}} - \sqrt{\frac{f(x)}{f(t)}} \right]^2 dx \geq 0. \end{aligned}$$

$F(x)$  为单调增函数, 且  $F(a) = 0$ , 所以  $F(b) \geq F(a) > 0$ , 即

$$\int_a^b f(x) dx \int_a^b \frac{1}{f(x)} dx \geq (b-a)^2.$$

**例 5.15** 设  $f(x)$  在  $[0, a]$  上二阶可导, 且  $f''(x) \geq 0$ , 证明  $\int_0^a f(x) dx \geq af\left(\frac{a}{2}\right)$ .

**证明**  $f(x)$  在  $\frac{a}{2}$  处的一阶泰勒公式为

$$f(x) = f\left(\frac{a}{2}\right) + f'\left(\frac{a}{2}\right)\left(x - \frac{a}{2}\right) + \frac{f''(\xi)}{2!}\left(x - \frac{a}{2}\right)^2,$$

其中,  $\xi$  在  $x$  与  $\frac{a}{2}$  之间. 利用条件  $f''(x) \geq 0$ , 可得  $f(x) \geq f\left(\frac{a}{2}\right) + f'\left(\frac{a}{2}\right)\left(x - \frac{a}{2}\right)$ . 两边从 0 到  $a$  取积分, 得  $\int_0^a f(x) dx \geq af\left(\frac{a}{2}\right) + f'\left(\frac{a}{2}\right) \int_0^a \left(x - \frac{a}{2}\right) dx = af\left(\frac{a}{2}\right)$ .

**注** 已知  $f(x)$  二阶可导, 可考虑利用  $f(x)$  的一阶泰勒公式估计  $f(x)$ ; 又所证的不等式中出现了点  $\frac{a}{2}$ , 故考虑使用在  $x_0 = \frac{a}{2}$  处的泰勒公式.

### 题型 5-11 用分部积分法计算定积分

**【解题思路】** 定积分的分部积分法的基本原则与不定积分的分部积分法类似, 在  $u, dv$  的选择方面, 按照不定积分的分部积分法的思路进行. 当被积函数中含有抽象函数的导数形式时, 常用分部积分法. 对于被积函数中含有变上、下限积分的定积分的情况, 常用的方法也是利用分部积分法, 把变上限或变下限积分取作  $u$ , 其余部分取作  $dv$ . 这类题目的另一种做法是将原积分化为二重积分(微积分(下册)的内容), 再更换累次积分的次序.

**例 5.16** 求下列定积分:

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \sin x}{\cos^3 x} dx; \quad (2) \int_0^1 e^{\sqrt{1-x}} dx; \quad (3) \int_1^e \cos(\ln x) dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad (1) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \sin x}{\cos^3 x} dx &= - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^3 x} d(\cos x) = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} x d\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{x}{\cos^2 x} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx \right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \tan x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$(2) \int_0^1 e^{\sqrt{1-x}} dx \xrightarrow{\sqrt{1-x}=t} -\int_1^0 e^t \cdot 2t dt = 2 \int_0^1 t e^t dt = 2 \left( t e^t \Big|_0^1 - \int_0^1 e^t dt \right) = 2.$$

$$\begin{aligned} (3) \int_1^e \cos(\ln x) dx &= [x \cos(\ln x)] \Big|_1^e + \int_1^e x \sin(\ln x) \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= e \cos 1 - 1 + \int_1^e \sin(\ln x) dx = e \cos 1 - 1 + x \sin(\ln x) \Big|_1^e - \int_1^e \cos(\ln x) dx \\ &= e \cos 1 - 1 + e \sin 1 - \int_1^e \cos(\ln x) dx, \end{aligned}$$

则  $2 \int_1^e \cos(\ln x) dx = e \cos 1 + e \sin 1 - 1$ , 故  $\int_1^e \cos(\ln x) dx = \frac{1}{2} [e(\cos 1 + \sin 1) - 1]$ .

**例 5.17** 设  $f(x)$  在  $[0, \pi]$  上具有二阶连续导数,  $f'(\pi) = 3$ , 且  $\int_0^\pi [f(x) + f''(x)] \cos x dx = 2$ , 求  $f'(0)$ .

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int_0^\pi [f(x) + f''(x)] \cos x dx &= \int_0^\pi f(x) d \sin x + \int_0^\pi \cos x df'(x) \\ &= \sin x \cdot f(x) \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin x \cdot f'(x) dx + \cos x \cdot f'(x) \Big|_0^\pi + \int_0^\pi \sin x \cdot f'(x) dx \\ &= -f'(\pi) - f'(0) = 2. \end{aligned}$$

故  $f'(0) = -2 - f'(\pi) = -2 - 3 = -5$ .

**例 5.18** 计算  $\int_0^1 (x-1)^2 f(x) dx$ , 其中  $f(x) = \int_0^x e^{-y^2+2y} dy$ .

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int_0^1 (x-1)^2 f(x) dx &= \int_0^1 (x-1)^2 \left[ \int_0^x e^{-y^2+2y} dy \right] dx \\ &= \left[ \frac{1}{3} (x-1)^3 \int_0^x e^{-y^2+2y} dy \right] \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{3} (x-1)^3 e^{-x^2+2x} dx \\ &= -\frac{1}{6} \int_0^1 (x-1)^2 e^{-(x-1)^2+1} d[(x-1)^2] \\ &\xrightarrow{t=(x-1)^2} -\frac{e}{6} \int_1^0 t e^{-t} dt = \frac{1}{6} (e-2). \end{aligned}$$

### 题型 5-12 带有绝对值的定积分的计算

**【解题思路】** 被积函数中有绝对值的定积分的计算, 应注意的是正确地确定分界点, 先去掉绝对值. 去掉绝对值的方法有两种, 一是令含绝对值部分的函数为零, 求出其实根, 以其实根为分界点, 将被积函数化成分段函数; 二是利用函数的奇偶性、周期性等性质, 使绝对值符号去掉.

**例 5.19** 求下列定积分:

$$(1) \int_{e^{-2}}^{e^2} \frac{|\ln x|}{\sqrt{x}} dx; \quad (2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin 2x} dx; \quad (3) \int_{-2}^2 (x + |x| e^{-x}) dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad (1) \int_{e^{-2}}^{e^2} \frac{|\ln x|}{\sqrt{x}} dx &= \int_{e^{-2}}^1 \frac{-\ln x}{\sqrt{x}} dx + \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx \\ &= -2 \sqrt{x} \ln x \Big|_{e^{-2}}^1 + 2 \int_{e^{-2}}^1 \frac{\sqrt{x}}{x} dx + 2 \sqrt{x} \ln x \Big|_1^{e^2} = 2 \int_1^{e^2} \frac{\sqrt{x}}{x} dx \\ &= \frac{4}{e} + 2 \int_{e^{-2}}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx + 4e - 2 \int_1^{e^2} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \end{aligned}$$

$$= -\frac{4}{e} + 4\sqrt{x} \Big|_{\frac{1}{e^2}}^1 + 4e - 4\sqrt{x} \Big|_1^{e^2} = 8\left(1 - \frac{1}{e}\right).$$

$$\begin{aligned} (2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin 2x} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\sin x - \cos x)^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x - \cos x| dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x) dx \\ &= (\sin x + \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + (-\cos x - \sin x) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\sqrt{2} - 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \int_{-2}^2 (x + |x|e^{-|x|}) dx &= \int_{-2}^2 x dx + \int_{-2}^2 |x|e^{-|x|} dx = 2 \int_0^2 xe^{-x} dx \\ &= -2xe^{-x} \Big|_0^2 + 2 \int_0^2 e^{-x} dx = -4e^{-2} - 2e^{-x} \Big|_0^2 = -2 - 6e^{-2}. \end{aligned}$$

### 题型 5-13 分段函数的定积分的计算

**【解题思路】** 分段函数的积分应分段计算, 应注意的是正确地确定分界点, 当被积函数是以给定函数与某一简单函数复合而成的函数时, 要通过变量代换将其化为给定函数的形式.

**例 5.20** 设  $f(x) = \begin{cases} 1+x^2, & x \leq 0, \\ e^{-x}, & x > 0, \end{cases}$  求  $\int_1^3 f(x-2) dx$ .

**解** 令  $t = x - 2$ , 则  $dx = dt$ , 于是

$$\int_1^3 f(x-2) dx = \int_{-1}^1 f(t) dt = \int_{-1}^0 (1+t^2) dt + \int_0^1 e^{-t} dt = \left(t + \frac{t^3}{3}\right) \Big|_{-1}^0 - e^{-t} \Big|_0^1 = \frac{7}{3} - \frac{1}{e}.$$

**例 5.21** 计算下列定积分:

$$(1) \Phi(x) = \int_0^x f(t) dt, \text{ 其中 } f(x) = \begin{cases} kx, & 0 \leq x \leq \frac{l}{2}, \\ c, & \frac{l}{2} < x \leq l; \end{cases}$$

(2)  $\int_0^x f(t)g(x-t)dt (x \geq 0)$ , 其中当  $x \geq 0$  时,  $f(x) = x$ , 而

$$g(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & x \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

**解** (1) 当  $0 \leq x \leq \frac{l}{2}$  时,  $\Phi(x) = \int_0^x kt dt = \frac{1}{2}kx^2$ .

当  $\frac{l}{2} < x \leq l$  时,  $\Phi(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^{\frac{l}{2}} kt dt + \int_{\frac{l}{2}}^x c dt = \frac{1}{8}kl^2 + c\left(x - \frac{l}{2}\right)$ . 因此

$$\Phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}kx^2, & 0 \leq x \leq \frac{l}{2}, \\ \frac{1}{8}kl^2 + c\left(x - \frac{l}{2}\right), & \frac{l}{2} < x \leq l. \end{cases}$$

$$(2) \int_0^x f(t)g(x-t)dt \xrightarrow{u=x-t} \int_x^0 f(x-u)g(u)(-du) = \int_0^x f(x-u)g(u)du.$$



当  $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$  时,  $\int_0^x f(x-u)g(u)du = \int_0^x (x-u)\sin u du = x - \sin x$ ;

当  $x \geq \frac{\pi}{2}$  时,  $\int_0^x f(x-u)g(u)du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-u)\sin u du + 0 = x - 1$ . 因此

$$\int_0^x f(t)g(x-t)dt = \begin{cases} x - \sin x, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ x - 1, & x \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

#### 题型 5-14 反常积分的计算

**【解题思路】** ①确定反常积分的类型: 判断是无穷限的反常积分还是无界函数的反常积分; ②求被积函数的原函数; ③求反常积分值, 判断其收敛性.

**例 5.22** 计算  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}$ .

**解** 分母的阶数较高, 可利用倒代换, 令  $x = \frac{1}{t}$ , 则

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}} = \int_1^0 \frac{-t^4}{\sqrt{1+t^5+t^{10}}} dt = \int_0^1 \frac{t^4 dt}{\sqrt{1+t^5+t^{10}}}.$$

再令  $u = t^5$ , 则

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{t^4 dt}{\sqrt{1+t^5+t^{10}}} &= \frac{1}{5} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u^2+u+1}} = \frac{1}{5} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{\left(u+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}} \\ &= \frac{1}{5} \ln \left( u + \frac{1}{2} + \sqrt{u^2+u+1} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{5} \ln \left( 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \right). \end{aligned}$$

**例 5.23** 计算反常积分  $\int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx$ .

**解** 被积函数有两个可疑的瑕点:  $x=0$  和  $x=1$ .

因为  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} = 1$ , 所以  $x=1$  是被积函数的唯一瑕点. 从而

$$\int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx = \int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx = (\arcsin \sqrt{x})^2 \Big|_0^1 = \frac{\pi^2}{4}.$$

#### 题型 5-15 平面图形的面积

**【解题思路】** ①画出平面图形, 借助于几何直观了解所求面积的特点, 确定积分变量; ②求出相关的交点, 确定积分区间; ③合理选择积分曲线方程(直角坐标方程, 参数方程, 或极坐标方程), 代入公式计算; ④当图形具有对称性或由几个面积相等部分所组成时, 可先求出一部分面积, 再利用对称性或等积性求全面积.

**例 5.24** 求下列各平面图形的面积  $S$ :

(1) 平面图形是由曲线  $y = \cos x$ ,  $y = \sin x$ ,  $x=0$  以及  $x=\pi$  所围成;

(2) 平面图形是由曲线  $y = -x + \frac{3}{2}$  和  $x = 4y^2$  所围成.

解 (1) 由于曲线  $y = \sin x$  与  $y = \cos x$  的交点坐标为  $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  (如图 5-1(a) 所示), 因此平面图形的面积为

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (\sin x - \cos x) dx \\ &= (\sin x + \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + (-\cos x - \sin x) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} = 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

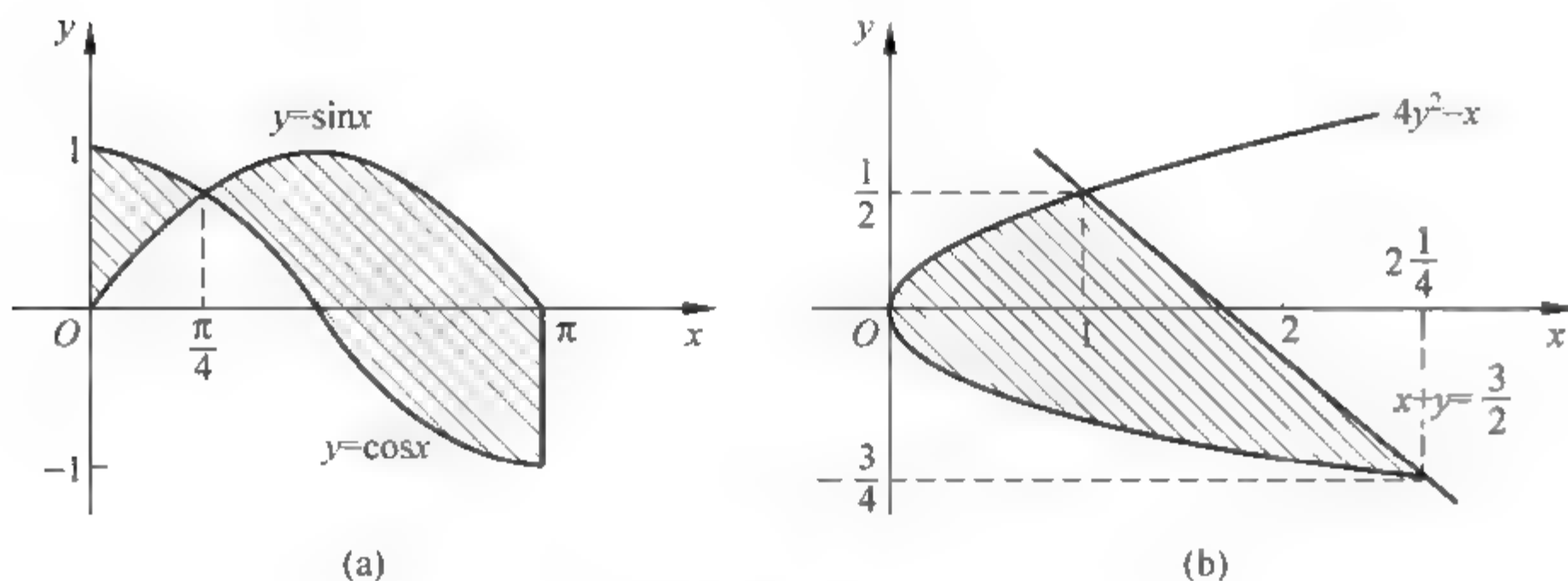


图 5-1

(2) 由于曲线  $y = -x + \frac{3}{2}$  与  $x = 4y^2$  的交点为  $\left(1, \frac{1}{2}\right)$  和  $\left(2\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}\right)$  (如图 5-1(b) 所示), 这里我们选择  $y$  为积分变量, 因此平面图形面积为

$$S = \int_{-\frac{3}{4}}^{\frac{1}{2}} \left[ \left( \frac{3}{2} - y \right) - 4y^2 \right] dy = \left( \frac{3}{2}y - \frac{1}{2}y^2 - \frac{4}{3}y^3 \right) \Big|_{-\frac{3}{4}}^{\frac{1}{2}} = \frac{125}{96}.$$

**例 5.25** 已知星形线的参数方程为  $\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t \end{cases} (a > 0)$ , 试求它所围图形的面积.

解 根据图形的对称性 (如图 5-2 所示), 可得它所围的面积为

$$\begin{aligned} A &= 4 \int_0^a y dx = 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 a \sin^3 t \cdot 3a \cos^2 t (-\sin t) dt \\ &= 12 \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 [\sin^4 t - \sin^6 t] dt = 12a^2 \left[ \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} \left( 1 - \frac{5}{6} \right) \right] = \frac{3\pi}{8} a^2. \end{aligned}$$

**例 5.26** 求心脏线  $r = a(1 + \cos \theta)$  与  $r = a (a > 0)$  所围成部分的面积.

解 画出草图 (如图 5-3 所示), 由图所求面积为 3 个部分:

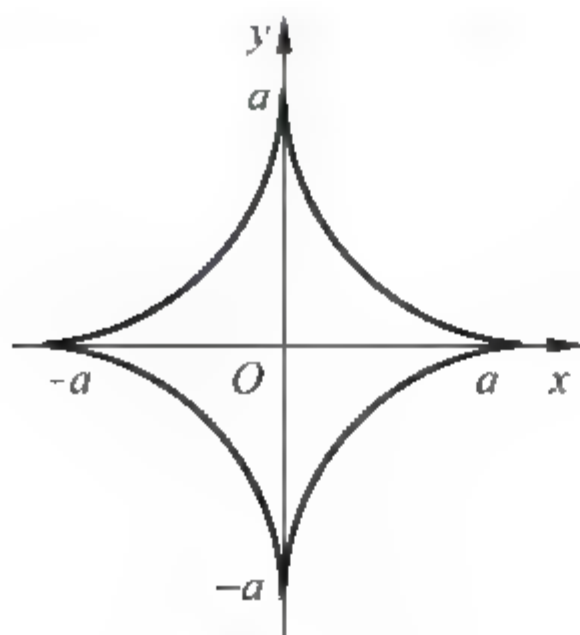


图 5-2

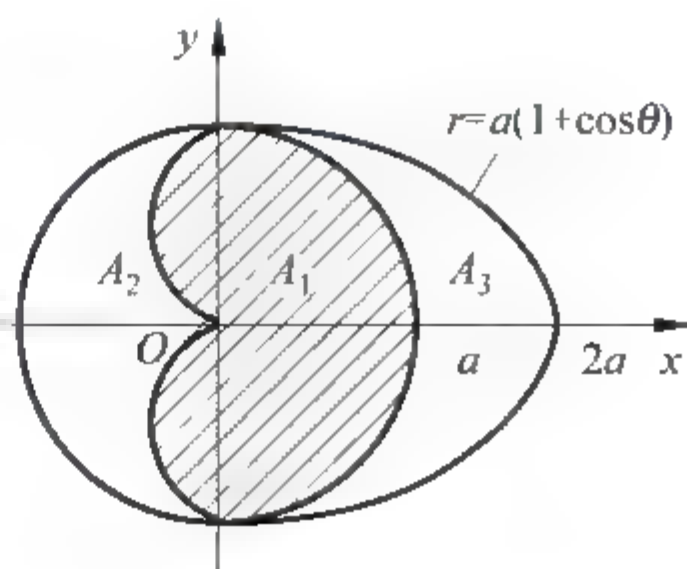


图 5-3

- (1) 圆内、心脏线内公共部分的面积为  $A_1$ ; (2) 圆内、心脏线外公共部分的面积为  $A_2$ ; (3) 圆外、心脏线内公共部分的面积为  $A_3$ .

根据图形的对称性,可计算上半部分的面积再乘 2 即可.

先求交点,由  $\begin{cases} r=a(1+\cos\theta), \\ r=a, \end{cases}$  得  $(\frac{\pi}{2}, a), (\frac{3\pi}{2}, a)$ , 于是  $A_1$  可视为  $y$  轴左侧的一部分

(极角由  $\frac{\pi}{2}$  变到  $\frac{3\pi}{2}$ ) 与  $y$  轴右侧的半圆合起来的,故

$$\begin{aligned} A_1 &= 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1}{2} r^2(\theta) d\theta + \frac{\pi}{2} a^2 = a^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (1 + \cos\theta)^2 d\theta + \frac{\pi}{2} a^2 \\ &= \frac{\pi}{2} a^2 + a^2 \left( \frac{3}{4} \pi - 2 \right) = a^2 \left( \frac{5}{4} \pi - 2 \right), \end{aligned}$$

$$A_2 = \pi a^2 - A_1 = a^2 \left( 2 - \frac{\pi}{4} \right).$$

$$A_3 = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} a^2 (1 + \cos\theta)^2 d\theta - a^2 \left( \frac{5}{4} \pi - 2 \right) = a^2 \left( 2 + \frac{\pi}{4} \right),$$

( $A_1 + A_3 = \frac{3}{2} \pi a^2$  就是心脏线所围成的面积).

**例 5.27** 试求由曲线  $y = xe^x$  与  $x$  轴的负半轴所围平面图形的面积.

**解** 如图 5-4 所示,由于  $x=0$  时,  $y=0$ ;  $x \rightarrow -\infty$  时,  $y = xe^x \rightarrow 0$ , 故取  $x$  为积分变量,  $x \in (-\infty, 0]$ , 在任意部分区间  $[x, x+dx]$  上相应的面积元素为  $dA = |xe^x| dx$ , 从而, 所求面积为  $A = \int_{-\infty}^0 |xe^x| dx = -\int_{-\infty}^0 xe^x dx = 1$ .

#### 题型 5-16 旋转体的体积

**【解题思路】** 用定积分求旋转体的体积时,要恰当选取积分变量. 求绕  $x$  轴或平行于  $x$  轴的直线旋转的旋转体体积时,一般选  $x$  为积分变量. 求绕  $y$  轴或平行于  $y$  轴的直线旋转的旋转体的体积时,一般选  $y$  为积分变量.

**例 5.28** 求由曲线  $y = x^2 - 2x$  及直线  $y=0, x=1, x=3$  所围成的平面图形的面积  $S$ , 并分别求该平面图形绕  $x$  轴及绕  $y$  轴旋转所得到的立体的体积.

**解** 画草图(如图 5-5 所示).

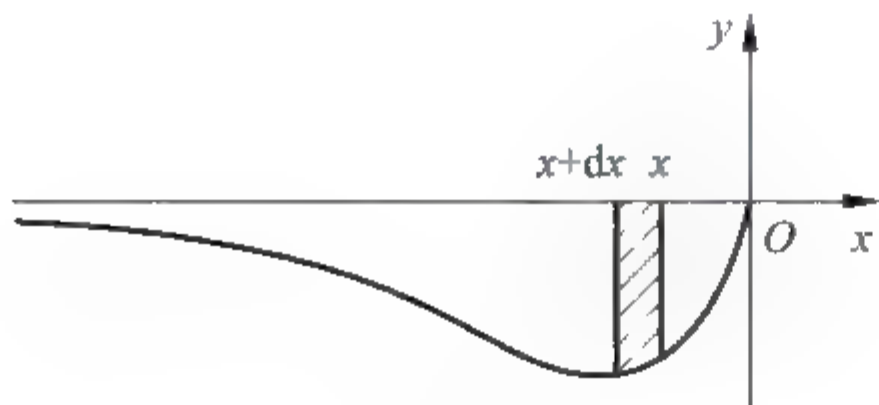


图 5-4

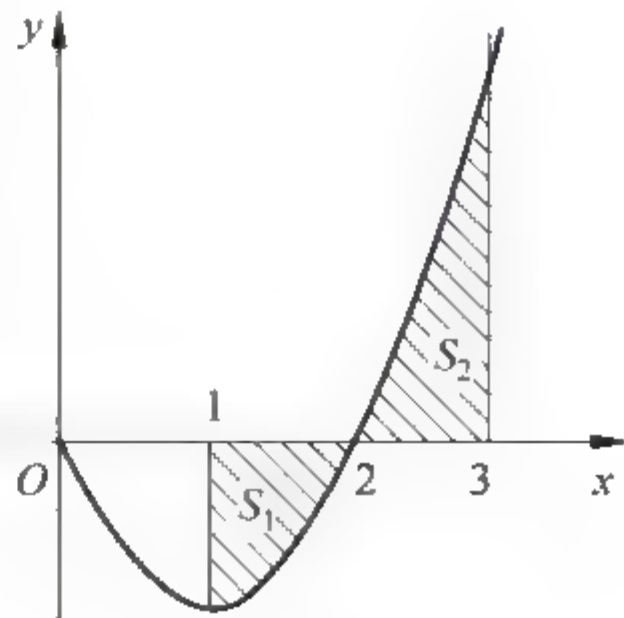


图 5-5



$$\begin{aligned}\text{面积: } S &= S_1 + S_2 = \int_1^2 (2x - x^2) dx + \int_2^3 (x^2 - 2x) dx \\ &= \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right) \Big|_1^2 + \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2\right) \Big|_2^3 = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 2.\end{aligned}$$

绕  $x$  轴旋转的体积为

$$V_x = \pi \int_1^3 (x^2 - 2x)^2 dx = \pi \int_1^3 (x^4 - 4x^3 + 4x^2) dx = \pi \left( \frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{4}{3}x^3 \right) \Big|_1^3 = \frac{46}{15}\pi.$$

$S_1$  绕  $y$  轴旋转一周形成的立体体积为

$$V_1 = \pi \int_{-1}^0 (1 + \sqrt{1+y})^2 dy - \pi = \pi \int_{-1}^0 (1 + 2\sqrt{1+y} + 1+y) dy - \pi = \frac{11}{6}\pi.$$

$S_2$  绕  $y$  轴旋转一周形成的立体体积为

$$V_2 = 27\pi - \pi \int_0^3 (1 + \sqrt{1+y})^2 dy = 27\pi - \pi \int_0^3 (2 + 2\sqrt{1+y} + y) dy = \frac{43}{6}\pi.$$

故绕  $y$  轴旋转一周形成的立体体积,  $V_y = V_1 + V_2 = \frac{11}{6}\pi + \frac{43}{6}\pi = 9\pi$ .

如以  $x$  为积分变量, 更为简单.  $V_y = 2\pi \left[ \int_1^2 x(2x - x^2) dx + \int_2^3 (x^2 - 2x) dx \right] = 9\pi$ .

此处注意  $S_1$  在  $x$  轴下方, 故体积前加一负号.

**例 5.29** 过原点作曲线  $y = \ln x$  的切线, 该切线与  $y = \ln x$  及  $x$  轴围成平面图形  $D$ . 求:

(1)  $D$  的面积;

(2)  $D$  绕直线  $x = e$  旋转一周所形成的旋转体的体积.

**解** (1) 设曲线  $y = \ln x$  在  $(t, \ln t)$  点处的切线为

$y - \ln t = \frac{x}{t} - 1$ , 由于切线要过原点, 因而得  $\ln t = 1$ , 即

$t = e$ , 切点为  $(e, 1)$ , 于是切线方程为  $y = \frac{x}{e}$ , 从而  $D$  的

图形如图 5-6 所示. 选  $y$  为积分变量, 则  $D$  的面积为

$$A = \int_0^1 (e^y - ey) dy = \frac{e}{2} - 1.$$

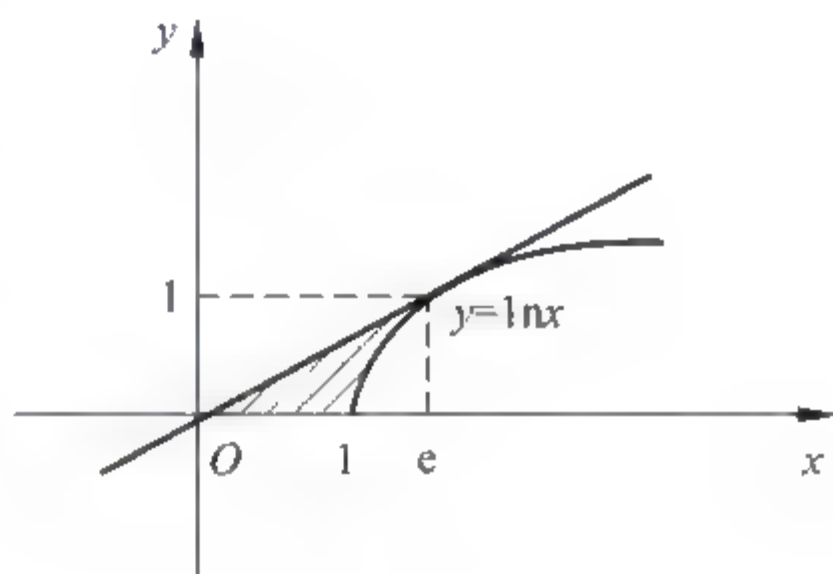


图 5-6

(2) 切线  $y = \frac{x}{e}$ 、 $x$  轴及直线  $x = e$  所围成三角形

绕直线  $x = e$  旋转一周所得圆锥体的体积  $V_1 = \pi e^2/3$ , 而由  $y = \ln x$ 、 $x$  轴以及直线  $x = e$  所围

曲边三角形绕直线  $x = e$  旋转一周所得旋转体, 其旋转轴  $x = e$  为平行于  $y$  轴的直线, 故选  $y$

为积分变量, 于是体积为  $V_2 = \pi \int_0^1 (e - e^y)^2 dy = \frac{\pi}{2} (4e - 1 - e^2)$ , 因此所求旋转体的体积为

$$V = V_1 - V_2 = \frac{\pi}{6} (5e^2 - 12e + 3).$$

**例 5.30** 求曲线  $y = 3 - |x^2 - 1|$  与  $x$  轴围成的封闭图形绕  $y = 3$  旋转而成的立体体积.

**解**  $y = 3 - |x^2 - 1|$  与  $x$  轴交点是  $(-2, 0)$ ,  $(2, 0)$ . 曲线  $y = f(x) = 3 - |x^2 - 1|$  围成的平面图形如图 5-7 所示. 显然做垂直分割方便, 任取  $[x, x + dx] \subset [-2, 2]$  相应的小窄曲边梯形绕  $y = 3$  旋转而成的立体体积, 于是

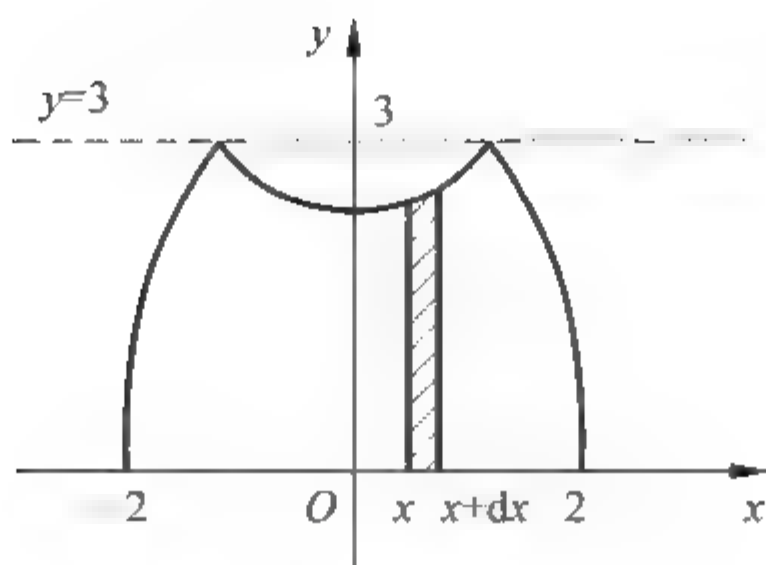


图 5-7

$$\begin{aligned}
 dV &= \pi[3^2 - (3 - f(x))^2]dx = \pi[9 - |x^2 - 1|^2]dx, \\
 V &= \pi \int_{-2}^2 [9 - (x^2 - 1)^2]dx = 2\pi \int_0^2 [9 - (x^4 - 2x^2 + 1)]dx \\
 &= 2\pi \left[ 18 - \left( \frac{1}{5} \times 2^5 - \frac{2}{3} \times 2^3 + 2 \right) \right] = \frac{448}{15}\pi.
 \end{aligned}$$

## 5.4 课后习题解答

### 习题 5.1

1. 利用定积分的定义, 试求下列定积分:

(1)  $\int_0^1 2x dx$ ;

(2)  $\int_0^1 e^x dx$ .

解 (1) 因函数  $f(x) = 2x$  在  $[0, 1]$  上连续, 故可积. 从而定积分的值与对区间  $[0, 1]$  的分法及  $\xi_i$  的取法无关. 为便于计算, 将  $[0, 1]$   $n$  等分, 则  $\lambda = \Delta x_i = \frac{1}{n}$ . 于是  $\lambda \rightarrow 0$ , 即  $n \rightarrow \infty$ , 取每个小区间的右端点  $\xi_i$ , 则  $\xi_i = \frac{i}{n} (i=1, 2, \dots, n)$ , 故

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 2x dx &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n 2\xi_i \Delta x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n 2 \cdot \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^n i \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} (1 + 2 + 3 + \dots + n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right) = 1.
 \end{aligned}$$

(2) 因函数  $f(x) = e^x$  在  $[0, 1]$  上连续, 故可积. 从而定积分的值与对区间  $[0, 1]$  的分法及  $\xi_i$  的取法无关. 为便于计算, 将  $[0, 1]$   $n$  等分, 则  $\lambda = \Delta x_i = \frac{1}{n}$ . 于是  $\lambda \rightarrow 0$ , 即  $n \rightarrow \infty$ , 取每个小区间的右端点  $\xi_i$ , 则  $\xi_i = \frac{i}{n} (i=1, 2, \dots, n)$ , 故

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 e^x dx &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n e^{\xi_i} \Delta x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n e^{\frac{i}{n}} \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \dots + e^{\frac{n}{n}}) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} (1 - e)}{n(1 - e^{\frac{1}{n}})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} (1 - e)}{n \left( -\frac{1}{n} \right)} = e - 1.
 \end{aligned}$$

2. 利用定积分的几何意义, 计算下列定积分:

(1)  $\int_1^2 2x dx$ ;

(2)  $\int_{\sqrt{2}}^1 \sqrt{1-x^2} dx$ .

解 (1)  $\int_1^2 2x dx$  表示直线  $y = 2x$  与  $x = 1, x = 2, x$  轴所围成的直角梯形的面积, 即  $\frac{1}{2} \times (2 + 4) \times 1 = 3$ .

(2)  $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \sqrt{1-x^2} dx$  表示八分之一圆  $x^2 + y^2 = 1$  的面积减去由直线  $y = x$  与  $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$  及  $x$  轴所围成的

直角三角形的面积, 即  $\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$ .

3. 利用定积分表示下列极限:

(1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (\xi_i^2 - 3\xi_i) \Delta x_i$ ,  $\lambda$  是  $[-3, 5]$  上的分割; (2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{4 - \xi_i^2} \Delta x_i$ ,  $\lambda$  是  $[0, 2]$  上的分割;

(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[ \sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right]$ ;

(4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[ \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) + \ln \left( 1 + \frac{2}{n} \right) + \cdots + \ln \left( 1 + \frac{n-1}{n} \right) \right]$ .

解 (1)  $\int_{-3}^5 (x^2 - 3x) dx$ ; (2)  $\int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx$ ; (3)  $\int_0^1 \sin(\pi x) dx$ ; (4)  $\int_0^1 \ln(1+x) dx$ .

### 提高题

1. 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n + \frac{i^2+1}{n}}$ .

解  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{n + \frac{(i+1)^2}{n}} < \sum_{i=1}^n \frac{1}{n + \frac{i^2+1}{n}} < \sum_{i=1}^n \frac{1}{n + \frac{i^2}{n}}$ , 而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n + \frac{i^2}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \left(\frac{i}{n}\right)^2} \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4},$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n + \frac{(i+1)^2}{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{n + \frac{1}{n}} + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n + \frac{(i+1)^2}{n}} + \frac{1}{n + \frac{(n+1)^2}{n}} \right] \\ &= 0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{1 + \left(\frac{i+1}{n}\right)^2} \cdot \frac{1}{n} + 0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

所以, 由夹逼定理得  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n + \frac{i^2+1}{n}} = \frac{\pi}{4}$ .

2. 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \ln \left( 1 + \frac{k}{n} \right)$ .

解  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \ln \left( 1 + \frac{k}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \ln \left( 1 + \frac{k}{n} \right) \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 x \ln(1+x) dx$   
 $= \frac{x^2}{2} \ln(1+x) \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx = \frac{1}{4}.$

3. 设  $a_n = \sqrt[n^2]{\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right)^2 \cdots \left(1 + \frac{n}{n}\right)^n}$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =$  \_\_\_\_\_.

解  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \ln \left( 1 + \frac{k}{n} \right)}$ .

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \ln \left( 1 + \frac{k}{n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \ln \left( 1 + \frac{k}{n} \right) \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 x \ln(1+x) dx \\ &= \frac{x^2}{2} \ln(1+x) \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

故  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{\frac{1}{4}}$ , 即应填  $e^{\frac{1}{4}}$ .



4. 甲、乙两人赛跑,计时开始时,甲在乙前方 10(单位: m)处(如图 5-8 所示),实线表示甲的速度曲线  $v = v_1(t)$ (单位: m/s),虚线表示乙的速度曲线  $v = v_2(t)$ , 三块阴影部分的面积分别为 10, 20, 3, 计时开始后乙追上甲的时刻为  $t_0$ , 则( ).

- A.  $t_0 = 10$                       B.  $15 < t_0 < 20$   
C.  $t_0 = 25$                       D.  $t_0 > 25$

解 从 0 到  $t_0$  这段时间内甲、乙的位移分别为

$$\int_0^{t_0} V_1(t) dt, \int_0^{t_0} V_2(t) dt.$$

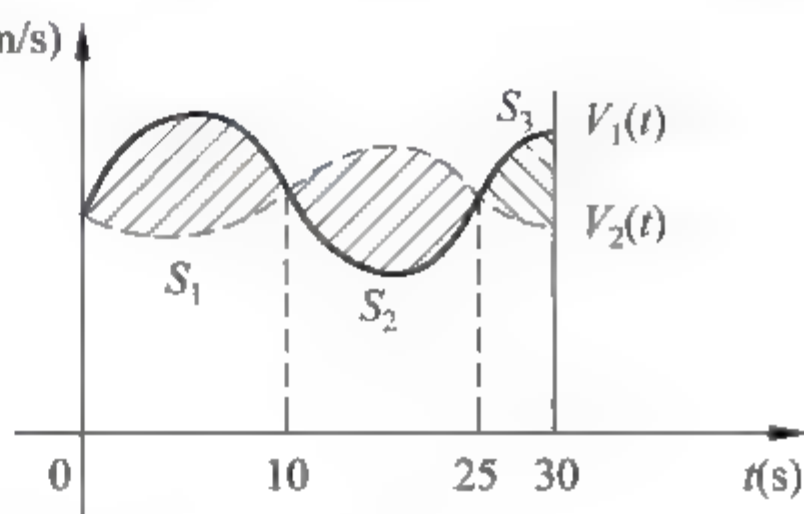


图 5 8

若乙要追上甲, 则  $\int_0^{t_0} [V_2(t) - V_1(t)] dt = 10$ , 当  $t_0 = 25$  时满足, 故选 C.

5. 设二阶可导函数  $f(x)$  满足  $f(1) = f(-1) = 1$ ,  $f(0) = -1$ , 且  $f''(x) > 0$ , 则( ).

- A.  $\int_{-1}^1 f(x) dx > 0$                       B.  $\int_{-1}^1 f(x) dx < 0$   
C.  $\int_{-1}^0 f(x) dx > \int_0^1 f(x) dx$                       D.  $\int_{-1}^0 f(x) dx < \int_0^1 f(x) dx$

解  $f(x)$  为偶函数满足题设, 此时  $\int_{-1}^0 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx$ , 故排除 C, D.

取  $f(x) = 2x^2 - 1$  满足条件, 则  $\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 (2x^2 - 1) dx = -\frac{2}{3} < 0$ , 故选 B.

6. 函数  $f(x) = 3^{x^2}$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \ln[f(1)f(2) \cdots f(n)]$ .

解  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \ln[f(1)f(2) \cdots f(n)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n \ln f(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n \ln 3^{k^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3} \ln 3$   

$$= \ln 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \ln 3 \int_0^1 x^2 dx = \frac{\ln 3}{3}.$$

## 习题 5.2

1. 设  $f(x)$  在  $[0, 4]$  上连续, 而且  $\int_0^3 f(x) dx = 4$ ,  $\int_0^4 f(x) dx = 7$ , 求下列各值.

- (1)  $\int_3^4 f(x) dx$ ;                      (2)  $\int_4^3 f(x) dx$ .

解 (1)  $\int_3^4 f(x) dx = \int_0^4 f(x) dx - \int_0^3 f(x) dx = 7 - 4 = 3$ ;

(2)  $\int_4^3 f(x) dx = -\int_3^4 f(x) dx = -3$ .

2. 比较定积分的大小:

- (1)  $\int_0^1 x^2 dx$  与  $\int_0^1 x^3 dx$ ;                      (2)  $\int_3^4 (\ln x)^2 dx$  与  $\int_3^4 (\ln x)^3 dx$ ;  
(3)  $\int_0^1 e^x dx$  与  $\int_0^1 e^{x^2} dx$ ;                      (4)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx$  与  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ .

解 (1) 因为当  $x \in [0, 1]$  时,  $x^2 \geq x^3$ , 等号仅在  $x = 0$  和  $x = 1$  时成立, 所以  $\int_0^1 x^2 dx > \int_0^1 x^3 dx$ ;

(2) 因为当  $x \in [3, 4]$  时,  $\ln x > 1$ , 所以  $(\ln x)^2 < (\ln x)^3$ , 所以  $\int_3^4 (\ln x)^2 dx < \int_3^4 (\ln x)^3 dx$ ;

(3) 因为当  $x \in [0, 1]$  时,  $e^x \geq e^{x^2}$ , 等号仅在  $x = 0$  和  $x = 1$  时成立, 所以  $\int_0^1 e^x dx > \int_0^1 e^{x^2} dx$ ;

(4) 设  $g(x) = x - \sin x$ , 则  $g(0) = 0$ ,  $g'(x) = 1 - \cos x \geq 0$ . 当  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  时,  $g'(x) \geq 0$ , 即  $g(x)$  在

$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  上单调增加, 故  $g(x) \geq g(0) = 0$ , 即  $x \geq \sin x$ , 于是  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ .

3. 估计定积分的值:

$$(1) \int_1^4 (x^2 + 1) dx;$$

$$(2) \int_0^{\pi} (1 + \sin x) dx;$$

$$(3) \int_0^2 e^{x^2-x} dx;$$

$$(4) \int_0^1 \frac{x^2+3}{x^2+2} dx;$$

$$(5) \int_0^1 \sqrt{2x-x^2} dx;$$

$$(6) \int_0^{\pi} \frac{1}{3+\sin^3 x} dx.$$

解 (1) 因为当  $x \in [1, 4]$  时,  $2 \leq x^2 + 1 \leq 17$ , 所以  $\int_1^4 2 dx \leq \int_1^4 (x^2 + 1) dx \leq \int_1^4 17 dx$ , 于是

$$6 \leq \int_1^4 (x^2 + 1) dx \leq 51;$$

(2) 当  $x \in [0, \pi]$  时,  $1 \leq 1 + \sin x \leq 2$ , 所以  $\int_0^{\pi} 1 dx \leq \int_0^{\pi} (1 + \sin x) dx \leq \int_0^{\pi} 2 dx$ , 于是

$$\pi \leq \int_0^{\pi} (1 + \sin x) dx \leq 2\pi;$$

(3) 当  $x \in [0, 2]$  时,  $-\frac{1}{4} \leq x^2 - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \leq 2$ , 所以  $e^{-\frac{1}{4}} \leq e^{(x^2-x)} \leq e^2$ , 因此

$$\int_0^2 e^{-\frac{1}{4}} dx \leq \int_0^2 e^{(x^2-x)} dx \leq \int_0^2 e^2 dx, \quad \text{即} \quad 2e^{-\frac{1}{4}} \leq \int_0^2 e^{(x^2-x)} dx \leq 2e^2;$$

(4) 因为当  $x \in [0, 1]$  时,  $\frac{4}{3} \leq \frac{x^2+3}{x^2+2} = 1 + \frac{1}{x^2+2} \leq \frac{3}{2}$ , 所以  $\frac{4}{3} \leq \int_0^1 \frac{x^2+3}{x^2+2} dx \leq \frac{3}{2}$ ;

(5) 当  $x \in [0, 1]$  时,  $0 \leq \sqrt{2x-x^2} = \sqrt{1-(x-1)^2} \leq 1$ , 所以

$$\int_0^1 0 dx \leq \int_0^1 \sqrt{2x-x^2} dx \leq \int_0^1 1 dx, \quad \text{即} \quad 0 \leq \int_0^1 \sqrt{2x-x^2} dx \leq 1;$$

(6)  $f(x) = \frac{1}{3+\sin^3 x}$ ,  $x \in [0, \pi]$ , 因为  $0 \leq \sin^3 x \leq 1$ , 所以  $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{3+\sin^3 x} \leq \frac{1}{3}$ , 故

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{4} dx \leq \int_0^{\pi} \frac{1}{3+\sin^3 x} dx \leq \int_0^{\pi} \frac{1}{3} dx, \quad \text{于是} \quad \frac{\pi}{4} \leq \int_0^{\pi} \frac{1}{3+\sin^3 x} dx \leq \frac{\pi}{3}.$$

4. 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1+x} dx = 0$ .

证明 由积分中值定理知, 至少存在  $\xi_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ , 使得  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1+x} dx = \frac{\xi_n^n}{1+\xi_n} \cdot \frac{1}{2}$ . 因为  $0 < \xi_n \leq \frac{1}{2}$ ,

所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n^n = 0$ , 而  $\left\{\frac{1}{1+\xi_n}\right\}$  有界, 于是  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1+x} dx = 0$ .

5. 设函数  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 在  $(0, 1)$  内可导, 且  $k \int_{1-\frac{1}{k}}^1 f(x) dx = f(0)$ ,  $k > 1$ . 证明: 存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使  $f'(\xi) = 0$ .

证明 由积分中值定理可知, 存在  $\eta \in \left[1 - \frac{1}{k}, 1\right]$ , 使得  $f(0) = k \int_{1-\frac{1}{k}}^1 f(x) dx = k \cdot \frac{1}{k} f(\eta) = f(\eta)$ .

再由罗尔定理可知, 存在  $\xi \in (0, \eta) \subset (0, 1)$ , 使即  $f'(\xi) = 0$ .

6. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 证明:

(1) 若在  $[a, b]$  上,  $f(x) \geq 0$ , 且  $\int_a^b f(x) dx = 0$ , 则在  $[a, b]$  上  $f(x) \equiv 0$ ;

(2) 若在  $[a, b]$  上,  $f(x) \geq 0$ , 且  $f(x)$  不恒等于零, 则  $\int_a^b f(x) dx > 0$ .

证明 (1) 反证法. 假设在  $(a, b)$  内有一点  $x_0$ , 使得  $f(x_0) > 0$ , 由  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续可知, 必有  $x_0$  的  $\delta$  邻域  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  使  $f(x) > 0$ , 则

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{x_0-\delta} f(x) dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x) dx + \int_{x_0+\delta}^b f(x) dx > \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x) dx > 0.$$

这与已知  $\int_a^b f(x)dx = 0$  矛盾. 对  $x_0 = a$  和  $x_0 = b$  同理可证, 故在  $[a, b]$  上  $f(x) = 0$ .

(2) 因为  $f(x) \geq 0$ , 所以  $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ . 假设  $\int_a^b f(x)dx = 0$ , 则由(1)结论可得在  $[a, b]$  上,  $f(x) = 0$ , 这与  $f(x)$  不恒等于零矛盾, 故  $\int_a^b f(x)dx > 0$ .

7. 若  $f(x)$  在  $[2, 6]$  上连续, 且  $f(x)$  在  $[2, 6]$  上的平均值为 4, 求  $\int_2^6 f(x)dx$ .

解 因为  $\frac{\int_2^6 f(x)dx}{4} = 4$ , 所以  $\int_2^6 f(x)dx = 16$ .

### 提高题

1. 设函数  $f(x)$  在  $[0, 3]$  上连续, 在  $(0, 3)$  内存在二阶导数, 且  $2f(0) = \int_0^2 f(x)dx = f(2) + f(3)$ .

证明: (1) 存在  $\eta \in (0, 2)$  使  $f(\eta) = f(0)$ ; (2) 存在  $\xi \in (0, 3)$ , 使  $f''(\xi) = 0$ .

【分析】需要证明的结论与导数有关, 自然联想到用微分中值定理.

证明 (1) 令  $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ , 因  $f(x)$  在闭区间  $[0, 2]$  上连续, 所以  $F(x)$  在闭区间  $[0, 2]$  上连续, 在开区间  $(0, 2)$  内可导, 由拉格朗日中值定理得, 至少存在一点  $\eta \in (0, 2)$ , 使得  $F(2) - F(0) = F'(\eta)(2 - 0)$ , 即  $\int_0^2 f(x)dx = 2f(\eta)$ . 又  $2f(0) = \int_0^2 f(x)dx$ , 所以  $f(\eta) = f(0)$ . 命题(1)得证.

(2) 因为  $2f(0) = f(2) + f(3)$ , 则  $f(0) = \frac{f(2) + f(3)}{2}$ . 又函数  $f(x)$  在闭区间  $[0, 3]$  上连续, 从而  $f(0) = \frac{f(2) + f(3)}{2}$  介于  $f(x)$  在  $[2, 3]$  上的最大值与最小值之间, 由介值定理知, 至少存在一点  $\gamma \in [2, 3]$ , 使得  $f(\gamma) = f(0)$ .

因此  $f(x)$  在区间  $[0, \eta]$ ,  $[0, \gamma]$  上都满足罗尔中值定理条件, 于是至少存在点  $\xi_1 \in (0, \eta)$ ,  $\xi_2 \in (\eta, \gamma)$ , 使得  $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$ .

由  $f(x)$  在闭区间  $[0, 3]$  上连续, 在开区间  $(0, 3)$  内存在二阶导数, 知  $f'(x)$  在  $[\xi_1, \xi_2]$  上连续, 在  $(\xi_1, \xi_2)$  可导, 用罗尔中值定理, 至少存在一点  $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (0, 3)$ , 使得  $f''(\xi) = 0$ .

### 习题 5.3

1. 求下列函数的导数:

$$(1) \int_0^x \sin e^t dt; \quad (2) \int_0^{x^2} e^{-t^2} dt; \quad (3) \int_{\sin x}^{\cos x} \cos(\pi t^2) dt; \quad (4) \int_0^x x f(t) dt.$$

解 (1)  $\frac{d}{dx} \left( \int_0^x \sin e^t dt \right) = \sin e^x$ .

(2)  $\frac{d}{dx} \left( \int_0^{x^2} e^{-t^2} dt \right) = e^{-x^4} (x^2)' = 2xe^{-x^4}$ .

(3)  $\frac{d}{dx} \left( \int_{\sin x}^{\cos x} \cos(\pi t^2) dt \right) = \cos(\pi \cos^2 x) (\cos x)' - \cos(\pi \sin^2 x) (\sin x)'$   
 $= \cos(\pi \cos^2 x) (-\sin x) - \cos(\pi \sin^2 x) (\cos x)$   
 $= \cos[\pi(1 - \sin^2 x)] (-\sin x) - \cos(\pi \sin^2 x) (\cos x)$   
 $= \cos(\pi \sin^2 x) \sin x - \cos(\pi \sin^2 x) (\cos x) = \cos(\pi \sin^2 x) (\sin x - \cos x).$

(4) 因为  $\int_0^x x f(t) dt = x \int_0^x f(t) dt$ , 所以  $\left( \int_0^x x f(t) dt \right)' = xf(x) + \int_0^x f(t) dt$ .

2. 求由  $\int_0^y e^t dt + \int_0^x \cos t dt = 0$  所决定的隐函数对  $x$  的导数  $\frac{dy}{dx}$ .



解 在方程两边同时对  $x$  求导得  $\frac{d}{dx}\left(\int_0^y e^t dt\right) + \frac{d}{dx}\left(\int_0^x \cos t dt\right) = 0$ , 于是  $e^y \frac{dy}{dx} + \cos x = 0$ , 即  $\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos x}{e^y}$ . 而由  $\int_0^y e^t dt + \int_0^x \cos t dt = 0$  得,  $e^y = 1 + \sin x = 0$ , 即  $e^y = 1 - \sin x$ , 于是  $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$ .

3. 求由参数表达式  $x = \int_0^t \sin u du, y = \int_0^t \cos u du$  所给定的函数  $y$  对  $x$  的导数.

$$\text{解 } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d\left(\int_0^t \cos u du\right)}{dt}}{\frac{d\left(\int_0^t \sin u du\right)}{dt}} = \frac{\cos t}{\sin t} = \cot t.$$

4. 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \arctan t dt}{x^2}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{\cos x}^1 e^{-t^2} dt}{x^2}; \quad (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin x} \sin t dt}{x^2}; \quad (4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (\arctan t)^2 dt}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$\text{解 } (1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \arctan t dt}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{\cos x}^1 e^{-t^2} dt}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot e^{-\cos^2 x}}{2x} = \frac{1}{2e}.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin x} \sin t dt}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \sin x \cdot \cos x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (\arctan t)^2 dt}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{(\arctan x)^2}{2x}}{\frac{2}{\sqrt{1+x^2}}} = \frac{\pi^2}{4}.$$

5. 求下列函数的定积分:

$$(1) \int_{-1}^8 \left( \sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx; \quad (2) \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} dx; \quad (3) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(4) \int_0^1 |2x-1| dx; \quad (5) \int_0^{2\pi} |\sin x| dx; \quad (6) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx.$$

$$\text{解 } (1) \int_{-1}^8 \left( \sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx = \left( \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{x} \right) \Big|_{-1}^8 = \frac{81}{8}.$$

$$(2) \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \Big|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} = \arctan \sqrt{3} - \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}.$$

$$(3) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \arcsin \frac{1}{2} - \arcsin \left( -\frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}.$$

$$(4) \text{ 因为 } |2x-1| = \begin{cases} 1-2x, & x \leq \frac{1}{2}, \\ 2x-1, & x > \frac{1}{2}, \end{cases} \text{ 所以}$$

$$\int_0^1 |2x-1| dx = \int_0^{1/2} (1-2x) dx + \int_{1/2}^1 (2x-1) dx = (x-x^2) \Big|_0^{1/2} + (x^2-x) \Big|_{1/2}^1 = \frac{1}{2}.$$

$$(5) \int_0^{2\pi} |\sin x| dx = \int_0^{\pi} \sin x dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin x) dx = (-\cos x) \Big|_0^{\pi} + \cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} = 4.$$

$$(6) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2 x - 1) dx = \tan x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - 1 - \frac{\pi}{4}.$$

6. 设  $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 1, \\ \frac{1}{2}x^2, & x > 1, \end{cases}$  求  $\int_0^2 f(x) dx$ .

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int_0^2 f(x) dx &= \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = \int_0^1 (x+1) dx + \int_1^2 \frac{1}{2} x^2 dx \\ &= \left( \frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_0^1 + \frac{x^3}{6} \Big|_1^2 = \frac{3}{2} + \frac{8}{6} - \frac{1}{6} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

7. 设  $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x, & 1 < x \leq 2, \end{cases}$  求  $\Phi(x) = \int_0^x f(t) dt$  ( $0 \leq x \leq 2$ ).

$$\text{解} \quad \Phi(x) = \begin{cases} \int_0^x t^2 dt, & 0 \leq x \leq 1 \\ \int_0^1 t^2 dt + \int_1^x (2-t) dt, & 1 < x \leq 2 \end{cases} = \begin{cases} \frac{x^3}{3}, & 0 \leq x \leq 1, \\ -\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{7}{6}, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

8. 设  $f(x)$  连续, 且  $f(x) = x + 2 \int_0^1 f(t) dt$ , 求  $f(x)$ .

解 对  $f(x) = x + 2 \int_0^1 f(t) dt$  两边积分, 得

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x dx + 2 \int_0^1 f(t) dt \int_0^1 1 dx,$$

于是  $\int_0^1 f(x) dx = -\int_0^1 x dx = -\frac{1}{2}$ , 即  $f(x) = x - 1$ .

9. 设  $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0, \\ x, & x \geq 0, \end{cases}$   $F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$ , 讨论  $F(x)$  在  $x=0$  处的连续性与可导性.

$$\text{解} \quad F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt = \begin{cases} \int_{-1}^x (t+1) dt, & x < 0 \\ \int_{-1}^0 (t+1) dt + \int_0^x t dt, & x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}, & x < 0, \\ \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}, & x \geq 0. \end{cases}$$

因为  $\lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$ , 所以  $\lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = F(0)$ , 即  $F(x)$  在  $x=0$  处连续.

又因为  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{x^2}{2} + x}{x} = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x^2}{2}}{x} = 0$ , 所以  $F(x)$  在  $x=0$  处不可导.

10. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续且  $f(x) > 0$ ,  $F(x) = \int_a^x f(t) dt + \int_b^x \frac{1}{f(t)} dt$ , 证明:

(1)  $F'(x) \geq 2$ ; (2) 方程  $F(x) = 0$  在  $(a, b)$  内有且只有一个根.

证明 (1)  $F'(x) = f(x) + \frac{1}{f(x)} = \frac{f^2(x) + 1}{f(x)} \geq \frac{2f(x)}{f(x)} = 2$ .

(2)  $F(a) = \int_a^a f(t) dt + \int_b^a \frac{1}{f(t)} dt = \int_b^a \frac{1}{f(t)} dt < 0$ ,  $F(b) = \int_a^b f(t) dt + \int_b^b \frac{1}{f(t)} dt = \int_a^b f(t) dt > 0$ .

由连续函数介值定理可知, 在  $(a, b)$  内必有  $\xi$  使得  $F(\xi) = 0$ . 又因为  $F'(x) > 0$ , 故  $F(x)$  在  $[a, b]$  上单调增加, 从而方程  $F(x) = 0$  在  $(a, b)$  内必有且仅有一根.

### 提高题

1. 已知两曲线  $y = f(x)$  与  $y = \int_0^{\arctan x} e^{t^2} dt$  在点  $(0, 0)$  处的切线相同. 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n+1} \cdot f\left(\frac{2}{n}\right)$

解  $y'(x) = e^{\arctan^2 x} \cdot \frac{1}{1+x^2}$ ,  $y'(0) = f'(0) = e^0 \cdot 1 = 1$ ,  $f(0) = y(0) = 0$ , 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n+1} \cdot f\left(\frac{2}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot f\left(\frac{2}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(\frac{2}{n}\right) - f(0)}{\frac{2}{n}} \cdot 2 = 2f'(0) = 2.$$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (x-t) \sin t^2 dt}{x^2 (1 - \sqrt{1-x^2})} = \underline{\hspace{2cm}}.$

解 原式  $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \int_0^x \sin t^2 dt - \int_0^x t \sin t^2 dt}{x^2 \cdot \frac{x^2}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin t^2 dt + x \sin x^2 - x \sin x^2}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{6x^2} = \frac{1}{6}.$

3. 已知函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续, 且  $f(x) = (x+1)^2 + 2 \int_0^x f(t) dt$ , 则当  $n \geq 2$  时,  $f^{(n)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}.$

解 由  $f(x) = (x+1)^2 + 2 \int_0^x f(t) dt$ , 得  $f(0) = 1$ , 且  $f'(x) = 2(x+1) + 2f(x)$ , 故  $f'(0) = 4$ ,

$$f''(x) = 2 + 2f'(x), \quad f''(0) = 10, \quad f'''(x) = 2f''(x), \quad f'''(0) = 2 \times 10,$$

$$f^{(4)}(x) = 2f'''(x), \quad f^{(4)}(0) = 2^2 \times 10, \dots, f^{(n)}(x) = 2f^{(n-1)}(x), \quad f^{(n)}(0) = 2^{n-2} \times 10 (n \geq 2).$$

从而  $f^{(n)}(0) = 5 \times 2^{n-1} (n \geq 2)$ , 故应填  $5 \times 2^{n-1} (n \geq 2)$ .

4. 设函数  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上可积, 且满足关系式  $f(x) = \frac{1}{1+x^2} + x^3 \int_0^1 f(x) dx$ ,  $f(x)$  的表达式为  $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}.$

解 两边取积分得

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx + \int_0^1 f(x) dx \cdot \int_0^1 x^3 dx = \arctan x \Big|_0^1 + \int_0^1 f(x) dx \cdot \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \int_0^1 f(x) dx,$$

即  $\frac{3}{4} \int_0^1 f(x) dx = \frac{\pi}{4}$ , 故  $\int_0^1 f(x) dx = \frac{\pi}{3}$ . 于是  $f(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{\pi}{3} x^3$ , 即应填  $f(x) + \frac{\pi}{3} x^3$ .

5. 设  $\alpha(x) = \int_0^x (e^{t^2} - 1) dt$ ,  $\beta(x) = \sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}$ , 当  $x \rightarrow 0$  时,  $\alpha(x)$  是  $\beta(x)$  的          阶无穷小.

解  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (e^{t^2} - 1) dt}{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (e^{t^2} - 1) dt}{\tan x - \sin x} \cdot (\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x})$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (e^{t^2} - 1) dt}{\sin x \left( \frac{1}{\cos x} - 1 \right)} \cdot 2 = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (e^{t^2} - 1) dt \cdot \cos x}{\sin x \cdot \frac{1}{2} x^2} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (e^{t^2} - 1) dt}{x^3}$$

$$= 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{3x^2} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{3x^2} = \frac{4}{3}.$$

故  $\alpha(x)$  是  $\beta(x)$  的同阶无穷小, 应填“同”.

6. 把  $x \rightarrow 0^+$  时的无穷小量  $\alpha = \int_0^x \cos t^2 dt$ ,  $\beta = \int_0^{x^2} \tan \sqrt{t} dt$ ,  $\gamma = \int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 dt$  排队, 使排在后面的是前一个的高阶无穷小, 则正确的排列次序是 ( ).

A.  $\alpha, \beta, \gamma$

B.  $\alpha, \gamma, \beta$

C.  $\beta, \alpha, \gamma$

D.  $\beta, \gamma, \alpha$

解  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{\int_0^{x^2} \tan \sqrt{t} dt} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x^2}{2x \cdot \tan \sqrt{x}} = \infty$ , 即  $\beta$  是  $\alpha$  的高阶无穷大, 排除 C, D.



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\beta}{\gamma} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} \tan \sqrt{t} dt}{\int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 dt} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan x \cdot 2x}{\sin x^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4x^{\frac{5}{2}}}{x^2} = 0,$$

即  $\beta$  是  $\gamma$  的高阶无穷小, 故应选 B.

7. (如图 5-9 所示) 连续函数  $y = f(x)$  在区间  $[-3, -2]$ ,  $[2, 3]$  上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周, 在区间  $[-2, 0]$ ,  $[0, 2]$  上的图形分别是直径为 2 的上、下半圆周, 设  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ , 则下列结论正确的是( ).

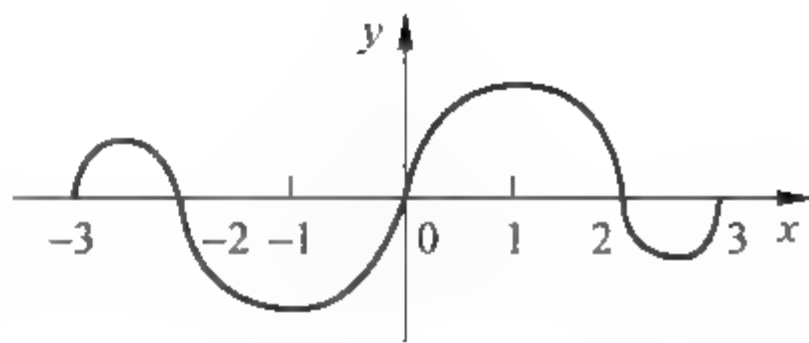


图 5-9

A.  $F(3) = -\frac{3}{4}F(-2)$

B.  $F(3) = \frac{5}{4}F(2)$

C.  $F(3) = \frac{3}{4}F(2)$

D.  $F(3) = -\frac{5}{4}F(-2)$

解  $F(3) = \int_0^3 f(t) dt = \int_0^2 f(t) dt + \int_2^3 f(t) dt = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}\pi,$

$F(-2) = \int_0^{-2} f(t) dt = -\int_{-2}^0 f(t) dt = -\left(-\frac{1}{2}\pi\right) = \frac{\pi}{2}, -\frac{3}{4}F(-2) = -\frac{3}{8}\pi,$

A, D 错.

$$\frac{3}{4}F(2) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2}\pi = \frac{3}{8}\pi = F(3).$$

故应选 C.

8. 设  $f(x) = \begin{cases} \frac{2\sin^2 ax + 4x^2}{e^{x^2} - 1}, & x < 0, \\ 6, & x = 0, \\ \frac{6\int_0^x \sin at^2 dt}{x - \tan x}, & x > 0. \end{cases}$

(1)  $a$  取何值时,  $f(x)$  在  $x = 0$  处连续;

(2)  $a$  取何值时,  $x = 0$  是  $f(x)$  的可去间断点.

解  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2\sin^2 ax + 4x^2}{e^{x^2} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2\sin^2 ax + 4x^2}{x^2} = 2a^2 + 4,$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{6\int_0^x \sin at^2 dt}{x - \tan x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{6\sin ax^2}{1 - \sec^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{6ax^2}{-x^2} = -6a.$

令  $2a^2 + 4 = -6a$ , 得  $a = -1, a = -2$ .

当  $a = -1$  时,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = 6$ , 故  $f(x)$  在  $x = 0$  点连续; 当  $a = -2$  时,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq f(0)$ , 故  $x = 0$  是  $f(x)$  的可去间断点.

9. 设可导函数  $y = y(x)$  由方程  $\int_0^{x+y} e^{-t^2} dt = \int_0^x x \sin t^2 dt$  确定, 则  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} =$  \_\_\_\_\_.

解 由题设可得  $e^{-(x+y)} \left(1 + \frac{dy}{dx}\right) = \int_0^x \sin t^2 dt + x \sin x^2.$

当  $x = 0$  时, 由题设可得  $\int_0^y e^{-t^2} dt = 0$ , 而  $e^{-t^2} > 0 (t > 0)$ , 故得  $y = 0$ , 取  $x = 0, y = 0$  代入上式得

$$1 + \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = 0, \quad \text{故} \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = -1.$$

故应填 -1.

10. 设函数  $f(x) = \int_0^1 |t^2 - x^2| dt (x > 0)$ , 求  $f'(x)$  并求  $f(x)$  的最小值.

$$\text{解 } f(x) = \int_0^1 |t^2 - x^2| dt = \begin{cases} \int_0^x (x^2 - t^2) dt + \int_x^1 (t^2 - x^2) dt, & 0 < x < 1 \\ \int_0^1 (x^2 - t^2) dt, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{4}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{3}, & 0 < x < 1, \\ x^2 - \frac{1}{3}, & x \geq 1, \end{cases}$$

$$\text{故 } f'(x) = \begin{cases} 4x^2 - 2x, & 0 < x < 1, \\ 2x, & x \geq 1. \end{cases}$$

令  $f'(x) = 0$  得  $x = \frac{1}{2}$ , 且  $f''\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ , 所以  $f(x)$  在  $x = \frac{1}{2}$  处取得最小值  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ .

11. 设函数  $f(x) = \int_0^1 t |t - x| dt$ , 求  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上的最大值与最小值.

$$\text{解 } f(x) = \int_0^1 t |t - x| dt = \int_0^x t(x - t) dt + \int_x^1 t(t - x) dt = \frac{x^3}{3} - \frac{x}{2} + \frac{1}{3}, f'(x) = x^2 - \frac{1}{2}.$$

令  $f'(x) = 0$ , 得  $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , 而  $f(0) = \frac{1}{3}$ ,  $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2 - \sqrt{2}}{6}$ ,  $f(1) = \frac{1}{6}$ , 则最小值为  $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2 - \sqrt{2}}{6}$ , 最大值为  $f(0) = \frac{1}{3}$ .

#### 习题 5.4

1. 计算下列定积分:

$$(1) \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2 - x^2} dx; \quad (2) \int_0^1 x^2 \sqrt{1 - x^2} dx; \quad (3) \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2 \sqrt{1 + x^2}}; \quad (4) \int_{-1}^1 \frac{x dx}{\sqrt{5 - 4x}};$$

$$(5) \int_0^4 \frac{x + 2}{\sqrt{2x + 1}} dx; \quad (6) \int_0^{\pi} \cos^4 x \sin x dx; \quad (7) \int_0^1 t e^{-t^2} dt; \quad (8) \int_1^e \frac{1 + \ln x}{x} dx;$$

$$(9) \int_0^{\pi} \sqrt{\sin^2 x - \sin^4 x} dx; \quad (10) \int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}.$$

解 (1) 设  $x = \sqrt{2} \sin t$ , 则  $dx = \sqrt{2} \cos t dt$ . 当  $x = 0$  时,  $t = 0$ ; 当  $x = \sqrt{2}$  时,  $t = \frac{\pi}{2}$ . 于是

$$\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2 - x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2 - 2 \sin^2 t} \cdot \sqrt{2} \cos t dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \left. \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{2} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.$$

(2) 设  $x = \sin t$ , 则  $dx = \cos t dt$ , 当  $x = 0$  时,  $t = 0$ ; 当  $x = 1$  时,  $t = \frac{\pi}{2}$ . 于是

$$\int_0^1 x^2 \sqrt{1 - x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t dt = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 4t}{2} dt = \frac{1}{8} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\sin 4t}{4} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{16}.$$

(3) 设  $x = \tan t$ , 则  $dx = \sec^2 t dt$ , 当  $x = 1$  时,  $t = \frac{\pi}{4}$ ; 当  $x = \sqrt{3}$  时,  $t = \frac{\pi}{3}$ . 于是

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2 \sqrt{1 + x^2}} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sec^2 t}{\tan^2 t \sec t} dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sec t}{\tan^2 t} dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos t}{\sin^2 t} dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{d \sin t}{\sin^2 t} = \left. -\frac{1}{\sin t} \right|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \sqrt{2} - \frac{2}{3} \sqrt{3}.$$

(4) 设  $t = \sqrt{5 - 4x}$ , 则  $x = \frac{5 - t^2}{4}$ ,  $dx = -\frac{t}{2} dt$ , 当  $x = 1$  时,  $t = 3$ ; 当  $x = 0$  时,  $t = 1$ . 于是

$$\int_{-1}^1 \frac{x dx}{\sqrt{5 - 4x}} = \int_3^1 \frac{5 - t^2}{4t} \left( -\frac{t}{2} \right) dt = \frac{1}{8} \int_3^1 (5 - t^2) dt = \frac{1}{8} \left( 10 - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_3^1 = \frac{1}{8} \left( 10 - \frac{26}{3} \right) = \frac{1}{6}.$$

(5) 令  $t = \sqrt{2x+1}$ , 则  $x = \frac{t^2-1}{2}$ ,  $dx = tdt$ , 当  $x = 0$  时,  $t = 1$ ; 当  $x = 4$  时,  $t = 3$ . 从而

$$\begin{aligned} \int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}} dx &= \int_1^3 \frac{\frac{t^2-1}{2} + 2}{t} t dt = \frac{1}{2} \int_1^3 (t^2 + 3) dt = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} t^3 + 3t \right) \Big|_1^3 \\ &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{27}{3} + 9 \right) - \left( \frac{1}{3} + 3 \right) \right] = \frac{22}{3}. \end{aligned}$$

$$(6) \int_0^{\pi} \cos^4 x \sin x dx = - \int_0^{\pi} \cos^4 x d\cos x = - \frac{1}{5} \cos^5 x \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{5}.$$

$$(7) \int_0^1 t e^{-t^2} dt = - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-t^2} d(-t^2) = - \frac{1}{2} e^{-t^2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} (1 - e^{-1}).$$

$$(8) \int_1^e \frac{1 + \ln x}{x} dx = \int_1^e (1 + \ln x) d\ln x = \left( \ln x + \frac{\ln^2 x}{2} \right) \Big|_1^e = \frac{3}{2}.$$

(9) 因为  $\sqrt{\sin^2 x - \sin^4 x} = |\cos x| \sin x$ , 所以

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sqrt{\sin^2 x - \sin^4 x} dx &= \int_0^{\pi} |\cos x| \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \sin x dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x d\sin x - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x d\sin x = \frac{1}{2} \sin^2 x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \sin^2 x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 1. \end{aligned}$$

$$(10) \int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int_0^1 \frac{e^x dx}{1 + e^{2x}} = \int_0^1 \frac{d(e^x)}{1 + e^{2x}} = \arctan(e^x) \Big|_0^1 = \arctan e - \frac{\pi}{4}.$$

$$2. \text{ 设 } f(x) = \begin{cases} x e^{-x^2}, & x \geq 0, \\ \frac{1}{1 + \cos x}, & -1 < x < 0, \end{cases} \text{ 求 } \int_1^4 f(x-2) dx.$$

解 设  $t = x - 2$ , 则  $dt = dx$ , 于是

$$\begin{aligned} \int_1^4 f(x-2) dx &= \int_{-1}^2 f(t) dt = \int_{-1}^0 \frac{1}{1 + \cos t} dt + \int_0^2 t e^{-t^2} dt = \int_{-1}^0 \frac{1}{2 \cos^2 \frac{t}{2}} dt + \left( -\frac{1}{2} \right) \int_0^2 e^{-t^2} d(-t^2) \\ &= \int_{-1}^0 \frac{1}{\cos^2 \frac{t}{2}} d\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{1}{2} e^{-t^2} \Big|_0^2 = \tan \frac{t}{2} \Big|_{-1}^0 - \frac{1}{2} (e^{-4} - 1) = \tan \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-4} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

3. 利用函数的奇偶性计算下列定积分:

$$(1) \int_{-5}^5 \frac{x^3 \sin^2 x}{x^4 + 2x^2 + 1} dx;$$

$$(2) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$(3) \int_{-1}^1 \frac{2x^2 + x \cos x}{1 + \sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$(4) \int_{-2}^2 \frac{x + |x|}{2 + x^2} dx.$$

解 (1) 因为被积函数为奇函数, 并且积分区间为对称区间, 所以积分的值为 0.

$$\begin{aligned} (2) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx &= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} (\arcsin x)^2 d\arcsin x = 2 \cdot \frac{(\arcsin x)^3}{3} \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \left( \arcsin \frac{1}{2} \right)^3 \\ &= \frac{2}{3} \cdot \left( \frac{\pi}{6} \right)^3 = \frac{\pi^3}{324}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \int_{-1}^1 \frac{2x^2 + x \cos x}{1 + \sqrt{1-x^2}} dx &= \int_{-1}^1 \frac{2x^2}{1 + \sqrt{1-x^2}} dx + \int_{-1}^1 \frac{x \cos x}{1 + \sqrt{1-x^2}} dx = 4 \int_0^1 \frac{x^2}{1 + \sqrt{1-x^2}} dx \\ &= 4 \int_0^1 \frac{x^2 (1 - \sqrt{1-x^2})}{x^2} dx = 4 \int_0^1 (1 - \sqrt{1-x^2}) dx \\ &= 4 \left( 1 - \frac{\pi}{4} \right) = 4 - \pi. \end{aligned}$$



$$(4) \int_{-2}^2 \frac{x + |x|}{2 + x^2} dx = \int_{-2}^2 \frac{x}{2 + x^2} dx + \int_{-2}^2 \frac{|x|}{2 + x^2} dx = 0 + 2 \int_0^2 \frac{x}{2 + x^2} dx = \int_0^2 \frac{d(2 + x^2)}{2 + x^2} \\ = \ln(2 + x^2) \Big|_0^2 = \ln 6 - \ln 2 = \ln 3.$$

4. 计算下列定积分:

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx \quad (2) \int_1^e x \ln x dx; \quad (3) \int_0^1 x \arctan x dx; \quad (4) \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx;$$

$$(5) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x dx}{1 + \cos 2x}; \quad (6) \int_{\frac{1}{e}}^e |\ln t| dt; \quad (7) \int_1^e \sin(\ln x) dx; \quad (8) \int_0^1 \frac{x e^x}{(1+x)^2} dx.$$

解 (1) 由分部积分公式得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 d(-\cos x) = x^2(-\cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x d(x^2) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx.$$

再用一次分部积分公式得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x d(\sin x) = x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{\pi}{2} + \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

$$\text{从而 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx = \pi - 2.$$

$$(2) \int_1^e x \ln x dx = \int_1^e \ln x d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x^2 \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \int_1^e x dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_1^e \\ = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}.$$

(3) 令  $u = \arcsin x, dv = dx$ , 则  $du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, v = x$ , 于是

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx = (x \arcsin x) \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} d(1-x^2) \\ = \frac{\pi}{12} + (\sqrt{1-x^2}) \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1.$$

$$(4) \int_0^1 x \arctan x dx = \int_0^1 \arctan x d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2} \arctan x \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx \\ = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} (1 - \arctan x) \Big|_0^1 \\ = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

$$(5) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x dx}{1 + \cos 2x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x dx}{2 \cos^2 x} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \tan x dx = \frac{1}{2} \left( x \tan x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx \right) \\ = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln |\cos x| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{\sqrt{2}} - \ln 1 = \frac{\pi}{8} - \frac{\ln 2}{4}.$$

$$(6) \int_{\frac{1}{e}}^e |\ln t| dt = - \int_{\frac{1}{e}}^1 \ln t dt + \int_1^e \ln t dt = - (t \ln t - t) \Big|_{\frac{1}{e}}^1 + (t \ln t - t) \Big|_1^e = 2 - 2e^{-1}.$$

$$(7) \int_1^e \sin(\ln x) dx = x \sin(\ln x) \Big|_1^e - \int_1^e x \cos(\ln x) \frac{dx}{x} = x \sin(\ln x) \Big|_1^e - \int_1^e \cos(\ln x) dx \\ = e \sin 1 - x \cos(\ln x) \Big|_1^e - \int_1^e \sin(\ln x) dx = e \sin 1 - e \cos 1 + 1 - \int_1^e \sin(\ln x) dx,$$

$$\text{故 } \int_1^e \sin(\ln x) dx = \frac{1}{2} (e \sin 1 - e \cos 1 + 1).$$

$$\begin{aligned}
 (8) \int_0^1 \frac{xe^x}{(1+x)^2} dx &= \int_0^1 e^x \frac{1+x-1}{(1+x)^2} dx = \int_0^1 \frac{e^x}{1+x} dx - \int_0^1 \frac{e^x}{(1+x)^2} dx = \int_0^1 \frac{e^x}{1+x} dx + \int_0^1 e^x d\left(\frac{1}{1+x}\right) \\
 &= \int_0^1 \frac{e^x}{1+x} dx + \frac{e^x}{1+x} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{e^x}{1+x} dx = \frac{e}{2} - 1.
 \end{aligned}$$

5. 已知  $f(x)$  连续且满足方程  $f(x) = xe^{-x} + 2\int_0^1 f(t)dt$ , 求  $f(x)$ .

解 对方程  $f(x) = xe^{-x} + 2\int_0^1 f(t)dt$  两边积分, 得  $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xe^{-x}dx + 2\int_0^1 f(t)dt$ , 即  $\int_0^1 f(x)dx = 1 - 2e^{-1} + 2\int_0^1 f(t)dt$ , 所以  $\int_0^1 f(x)dx = 2e^{-1} - 1$ , 于是  $f(x) = xe^{-x} + 4e^{-1} - 2$ .

6. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 证明  $\int_a^b f(x)dx = (b-a)\int_0^1 f[a+(b-a)x]dx$ .

证明 设  $x = a + (b-a)t$ , 则  $dx = (b-a)dt$ . 当  $x = a$  时,  $t = 0$ ; 当  $x = b$  时,  $t = 1$ . 于是  $\int_a^b f(x)dx = \int_0^1 f[a+(b-a)t](b-a)dt = (b-a)\int_0^1 f[a+(b-a)t]dt = (b-a)\int_0^1 f[a+(b-a)x]dx$ .

7. 证明:  $\int_0^1 x^m(1-x)^n dx = \int_0^1 x^n(1-x)^m dx$ .

证明 设  $x = 1-t$ , 则  $dx = -dt$ , 当  $x = 0$  时,  $t = 1$ ; 当  $x = 1$  时,  $t = 0$ . 于是

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n dx = \int_1^0 (1-t)^m t^n (-dt) = \int_0^1 (1-t)^m t^n dt = \int_0^1 x^n(1-x)^m dx.$$

8. 证明  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin x + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin x + \cos x} dx$ , 并求出积分值.

证明 令  $x = \frac{\pi}{2} - t$ , 则  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin x + \cos x} dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos^3 t}{\sin t + \cos t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 t}{\sin t + \cos t} dt$ .

设  $u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin x + \cos x} dx$ , 则  $2u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin x + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \sin^2 x - \frac{1}{2}\sin 2x + \cos^2 x \right) dx = \frac{\pi-1}{2}$ , 故  $u = \frac{\pi-1}{4}$ .

9. 若  $f(t)$  连续且为奇函数, 证明  $\int_0^x f(t)dt$  是偶函数; 若  $f(t)$  连续且为偶函数, 证明  $\int_0^x f(t)dt$  是奇函数.

证明 设  $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ , 则  $F(-x) = \int_0^{-x} f(t)dt \xrightarrow{t=-u} \int_0^x f(-u)(-du) = -\int_0^x f(-u)du$ .

又因为  $f(x)$  为奇函数, 所以  $f(-u) = -f(u)$ , 因此  $F(-x) = \int_0^x f(u)du = \int_0^x f(t)dt = F(x)$ , 即  $F(x)$  是偶函数.

若  $f(x)$  为偶函数, 所以  $f(-u) = f(u)$ , 因此  $F(-x) = -\int_0^x f(u)du = -\int_0^x f(t)dt = -F(x)$ , 即  $F(x)$  是奇函数.

10. 若  $f''(x)$  在  $[0, \pi]$  上连续,  $f(0) = 2, f(\pi) = 1$ , 证明:  $\int_0^\pi [f(x) + f''(x)] \sin x dx = 3$ .

证明 因为

$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi f''(x) \sin x dx &= \int_0^\pi \sin x df'(x) = \sin x f'(x) \Big|_0^\pi - \int_0^\pi f'(x) \cos x dx = -\int_0^\pi f'(x) \cos x dx \\
 &= -\int_0^\pi \cos x df(x) = -f(x) \cos x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi f(x) \sin x dx = f(\pi) + f(0) - \int_0^\pi f(x) \sin x dx \\
 &= 1 + 2 - \int_0^\pi f(x) \sin x dx = 3 - \int_0^\pi f(x) \sin x dx,
 \end{aligned}$$

所以  $\int_0^\pi [f(x) + f''(x)] \sin x dx = 3$ .

## 提高题

1.  $\int_{-\pi}^{\pi} (\sin^3 x + \sqrt{\pi^2 - x^2}) dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

解  $\int_{-\pi}^{\pi} (\sin^3 x + \sqrt{\pi^2 - x^2}) dx = 2 \int_0^{\pi} \sqrt{\pi^2 - x^2} dx = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot \pi^2 = \frac{\pi^3}{2}$ . 故应填  $\frac{\pi^3}{2}$ .

2.  $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(1+e^x) \cos^2 x} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

解  $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(1+e^x) \cos^2 x} dx \xrightarrow{x=-t} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{(1+e^{-t}) \cos^2 t}$ , 故

$$2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{(1+e^x) \cos^2 x} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{(1+e^x) \cos^2 x} + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^x dx}{(1+e^x) \cos^2 x} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+e^x}{(1+e^x) \cos^2 x} dx$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx = 2 \tan x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2,$$

即  $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(1+e^x) \cos^2 x} dx = 1$ . 故应填 1.

3.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2016} x}{\sin^{2016} x + \cos^{2016} x} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

解 设  $x = \frac{\pi}{2} - t$ , 则  $dx = -dt$ , 于是

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2016} x}{\sin^{2016} x + \cos^{2016} x} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos^{2016} t}{\cos^{2016} t + \sin^{2016} t} (-dt) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2016} x}{\cos^{2016} x + \sin^{2016} x} dx,$$

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2016} x}{\sin^{2016} x + \cos^{2016} x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2016} x}{\cos^{2016} x + \sin^{2016} x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2},$$

于是  $I = \frac{\pi}{4}$ , 故应填  $\frac{\pi}{4}$ .

4. 设连续非负函数满足  $f(x)f(-x) = 1 (-\infty < x < +\infty)$ , 则  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+f(x)} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

解  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+f(x)} dx \xrightarrow{x=-t} \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(-t)}{1+f(-t)} dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(-t)}{1+\frac{1}{f(t)}} dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(t) \cos t}{f(t)+1} dt$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x) \cos x}{1+f(x)} dx,$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+f(x)} dx = \frac{1}{2} \left[ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+f(x)} dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x) \cos x}{1+f(x)} dx \right] = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{[1+f(x)] \cos x}{1+f(x)} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \frac{1}{2} \cdot \sin x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

故应填 1.

5. 设函数  $f(x)$  连续, 且  $f(0) = f'(0) = 0$ , 记

$$F(x) = \begin{cases} \int_0^x \left[ \int_0^u f(t) dt \right] du, & x \leq 0, \\ \int_{-x}^0 \ln[1+f(x+t)] dt, & x > 0, \end{cases}$$

求  $F'(x)$  及  $F''(0)$ .

解 当  $x < 0$  时,  $F'(x) = \int_0^x f(t) dt$ ; 当  $x > 0$  时, 令  $u = x+t$ , 则  $F(x) = \int_0^x \ln[1+f(u)] du$ , 故得

$$F'(x) = \ln[1+f(x)].$$



$$\text{由于 } F'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\int_0^x du \int_0^u f(t) dt}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \int_0^x f(t) dt = 0,$$

$$F'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \ln(1+f(u)) du}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(1+f(x)) = \ln(1+f(0)) = 0,$$

所以  $F'(0) = 0$ , 从而

$$F'(x) = \begin{cases} \int_0^x f(t) dt, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ \ln[1+f(x)], & x > 0. \end{cases}$$

由于

$$F''_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{F'(x) - F'(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0,$$

$$F''_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F'(x) - F'(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln[1+f(x)]}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = 0,$$

所以  $F''(0) = 0$ .

6. 设函数  $f(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2} dt (x > 0)$ , 则  $f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) =$  \_\_\_\_\_.

$$\text{解 } f\left(\frac{1}{x}\right) = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\ln t}{1+t^2} dt \xrightarrow[t = \frac{1}{u}]{dt = -\frac{1}{u^2} du} \int_1^x \frac{\ln \frac{1}{u}}{1+\frac{1}{u^2}} \left(-\frac{1}{u^2}\right) du = \int_1^x \frac{\ln u}{1+u^2} du = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2} dt,$$

$$f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2} dt - \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2} dt = 0.$$

故应填 0.

$$7. \text{ 求 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \sqrt{x-t} e^t dt}{\sqrt{x^3}}.$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \sqrt{x-t} e^t dt}{\sqrt{x^3}} \xrightarrow{x-t=u} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x \cdot \int_0^x \sqrt{u} e^{-u} du}{x^{\frac{3}{2}}} \xrightarrow{\lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 1} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} e^{-x}}{\frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}} \cdot 1 = \frac{2}{3}.$$

8. 如图 5-10 所示, 曲线  $C$  的方程为  $y = f(x)$ , 点  $(3, 2)$  是它的一个拐点, 直线  $l_1$  与  $l_2$  分别是曲线  $C$  在点  $(0, 0)$  与  $(3, 2)$  处的切线, 其交点为  $(2, 4)$ . 设函数  $f(x)$  具有三阶连续导数, 计算定积分  $\int_0^3 (x^2 + x) f'''(x) dx$ .

解 由题设图形知  $f(0) = 0, f'(0) = 2; f(3) = 2, f'(3) = -2, f''(3) = 0$ . 故

$$\begin{aligned} \int_0^3 (x^2 + x) f'''(x) dx &= \int_0^3 (x^2 + x) df''(x) \\ &= (x^2 + x) f''(x) \Big|_0^3 - \int_0^3 f''(x) (2x + 1) dx \\ &= - \int_0^3 (2x + 1) df'(x) \\ &= - (2x + 1) f'(x) \Big|_0^3 + \int_0^3 f'(x) \cdot 2 dx \\ &= 16 + 2[f(3) - f(0)] = 20. \end{aligned}$$

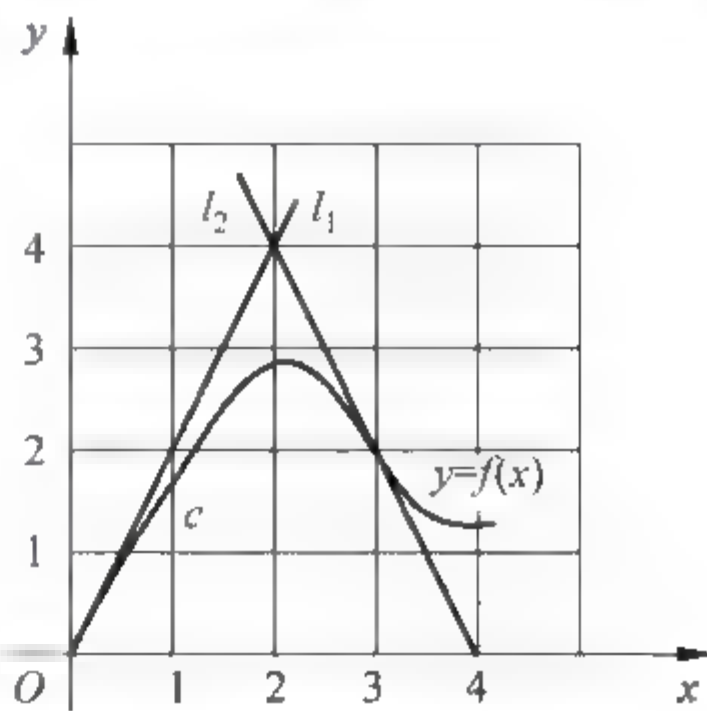


图 5-10

9.  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{21}{2}\pi} \sin^6 x dx$  .

解 因为  $f(x) = \sin^6 x$  的周期为  $\pi$ , 所以

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{21}{2}\pi} \sin^6 x dx = 10 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \sin^6 x dx = 10 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x dx = 10 \times 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x dx = 20 \times \frac{5}{6} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{25}{8}\pi.$$

故应填:  $\frac{25}{8}\pi$ .

10. 设  $a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx$ ,  $n$  为正整数, 证明: (1)  $|a_{n+1}| < |a_n|$ ; (2)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ .

证明 令  $x = n\pi + t$ , 得  $a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx = (-1)^n \int_0^\pi \frac{\sin t}{n\pi + t} dt$ .

(1)  $|a_{n+1}| = \int_0^\pi \frac{\sin t}{(n+1)\pi + t} dt < \int_0^\pi \frac{\sin t}{n\pi + t} dt = |a_n|$ ;

(2)  $|a_n| = \int_0^\pi \frac{\sin t}{n\pi + t} dt < \int_0^\pi \frac{\sin t}{n\pi} dt = \frac{2}{n\pi}$ , 由夹逼准则得  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ .

11. 设  $f(x)$  单调增加且有连续导数,  $f(0) = 0$ ,  $f(a) = b$ ,  $f(x)$  与  $g(x)$  互为反函数, 证明:

$$\int_0^a f(x) dx + \int_0^b g(x) dx = ab.$$

证明 设  $F(t) = \int_0^t f(x) dx + \int_0^{f(t)} g(x) dx - tf(t)$ , 则  $F(0) = 0$ ,

$$F'(t) = f(t) + g(f(t))f'(t) - f(t) - tf'(t) = f(t) + tf'(t) - f(t) - tf'(t) = 0,$$

所以  $F(t) \equiv C = F(0) = 0$ .

取  $t = a$ , 得

$$F(a) = \int_0^a f(x) dx + \int_0^{f(a)} g(x) dx - af(a) = 0, \quad \text{即} \quad \int_0^a f(x) dx + \int_0^b g(x) dx = ab.$$

12. 已知  $f(x)$  在  $[0, \frac{3\pi}{2}]$  上连续, 在  $(0, \frac{3\pi}{2})$  内是函数  $\frac{\cos x}{2x-3\pi}$  的一个原函数,  $f(0) = 0$ .

(1) 求  $f(x)$  在区间  $[0, \frac{3\pi}{2}]$  上的平均值;

(2) 证明  $f(x)$  在区间  $(0, \frac{3\pi}{2})$  内存在唯一零点.

解 (1)  $f(x) = \int_0^x \frac{\cos t}{2t-3\pi} dt$ ,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx}{\frac{3}{2}\pi} = \frac{2}{3\pi} \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \left( \int_0^x \frac{\cos t}{2t-3\pi} dt \right) dx = \frac{2}{3\pi} \left[ \int_0^x \frac{\cos t}{2t-3\pi} dt \cdot x \right]_0^{\frac{3\pi}{2}} - \int_0^{\frac{3\pi}{2}} x \cdot \frac{\cos x}{2x-3\pi} dx \\ &= \frac{2}{3\pi} \left[ \frac{3}{2}\pi \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\cos x}{2x-3\pi} dx - \int_0^{\frac{3\pi}{2}} x \cdot \frac{\cos x}{2x-3\pi} dx \right] = \frac{2}{3\pi} \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\cos x}{2x-3\pi} \cdot \left[ \frac{3}{2}\pi - x \right] dx \\ &= \frac{2}{3\pi} \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) \cdot \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\cos x}{2x-3\pi} \cdot (2x-3\pi) dx = -\frac{1}{3\pi} \cdot \sin x \Big|_0^{\frac{3\pi}{2}} = \frac{1}{3\pi}. \end{aligned}$$

(2)  $f'(x) < 0, x \in (0, \frac{\pi}{2})$ ,  $f'(x) > 0, x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ , 从而  $f(x)$  在  $(0, \frac{\pi}{2})$  内单调递减, 在  $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$  内

单调递增, 注意  $f(0) = 0$ , 则  $f(\frac{\pi}{2}) < 0$ ,

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\cos t}{2t-3\pi} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{2t-3\pi} dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\cos t}{2t-3\pi} dt > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{-2\pi} dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\cos t}{-2\pi} dt = \frac{1}{2\pi} > 0.$$

$f(x)$  在  $(0, \frac{\pi}{2})$  内单调递减, 则  $f(x)$  在  $(0, \frac{\pi}{2})$  内无零点,  $f(x)$  在  $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$  内单调递增, 则  $f(x)$  在

$(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$  内有唯一零点, 从而  $f(x)$  在  $(0, \frac{\pi}{2})$  内有唯一零点.

### 习题 5.5

1. 判断反常积分的敛散性:

- (1)  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4} dx$ ; (2)  $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ ; (3)  $\int_0^{+\infty} \sin x dx$ ; (4)  $\int_{-\infty}^0 \frac{e^x}{1+e^x} dx$ ;  
 (5)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+2} dx$ ; (6)  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+x^2)} dx$ ; (7)  $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$ ; (8)  $\int_0^1 \frac{\ln x}{x} dx$ ;  
 (9)  $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ ; (10)  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2 x} dx$ .

解 (1)  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4} dx = -\frac{1}{3x^3} \Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{3}$ , 故反常积分  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4} dx$  收敛.

(2)  $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} (1 - e^{-b}) = 1$ , 或  $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{+\infty} = 0 - (-1) = 1$ , 故收敛.

(3) 对任意  $b > 0$ ,  $\int_0^b \sin x dx = -\cos x \Big|_0^b = -\cos b + (\cos 0) = 1 - \cos b$ .

因为  $\lim_{b \rightarrow +\infty} (1 - \cos b)$  不存在, 故由定义知反常积分  $\int_0^{+\infty} \sin x dx$  发散.

(4)  $\int_{-\infty}^0 \frac{e^x}{1+e^x} dx = \ln(1+e^x) \Big|_{-\infty}^0 = \ln 2$ , 故反常积分  $\int_{-\infty}^0 \frac{e^x}{1+e^x} dx$  收敛.

(5)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2+1} d(x+1) = \arctan(x+1) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \pi$ , 故收敛.

(6)  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+x^2)} dx = \int_1^{+\infty} \left( \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} \right) dx = \ln \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{2} \ln 2$ , 故收敛.

(7)  $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{x} dx + \int_0^1 \frac{1}{x} dx$ , 而  $\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_0^1 = -\infty$ , 所以  $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$  发散, 即  $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$  发散.

(8) 因为  $\int_0^1 \frac{\ln x}{x} dx = \int_0^1 \ln x d \ln x = \frac{\ln^2 x}{2} \Big|_0^1 = -\infty$ , 从而  $\int_0^1 \frac{\ln x}{x} dx$  发散.

(9) 因为  $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} d(1-x^2) = -\sqrt{1-x^2} \Big|_0^1 = -1$ , 从而  $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$  收敛.

(10) 因为  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2 x} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2 x} dx = 2 \tan x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \infty$ , 从而  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2 x} dx$  发散.

2. 已知  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1+x}{x} \right)^{ax} = \int_{-\infty}^a te^t dt$ , 求常数  $a$ .

解  $\int_{-\infty}^a te^t dt = (te^t - e^t) \Big|_{-\infty}^a = e^a(a-1)$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1+x}{x} \right)^{ax} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^{e \cdot x} = e^a$ , 由  $e^a(a-1) = e^a$ ,

解得  $a = 2$ .

3. 当  $\lambda$  为何值时, 反常积分  $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^\lambda}$  收敛? 当  $\lambda$  为何值时, 该反常积分发散?

解  $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^\lambda} = \int_2^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{(\ln x)^\lambda} = \frac{1}{1-\lambda} (\ln x)^{1-\lambda} \Big|_2^{+\infty}$ .

当  $1-\lambda > 0$ , 即  $\lambda < 1$  时,  $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^\lambda} \rightarrow +\infty$ ;

当  $1-\lambda = 0$ , 即  $\lambda = 1$  时,  $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \ln |\ln x| \Big|_2^{+\infty} \rightarrow +\infty$ ;

当  $1-\lambda < 0$ , 即  $\lambda > 1$  时,  $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^\lambda} = \frac{(\ln 2)^{1-\lambda}}{\lambda-1}$ .



故当  $\lambda \leq 1$  时, 反常积分  $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^\lambda}$  发散, 当  $\lambda > 1$  时, 反常积分  $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^\lambda}$  收敛.

4. 计算  $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx$ .

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx &= \int_1^{+\infty} \arctan x d\left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x} \arctan x \Big|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+x^2)} dx \\ &= \frac{\pi}{4} + \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right) dx = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln \frac{x^2}{1+x^2} \Big|_1^{+\infty} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

### 提高题

1.  $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2} dx$  \_\_\_\_\_.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \text{原式} &= \int_0^{+\infty} \ln(1+x) d\left(-\frac{1}{1+x}\right) = \left(-\frac{1}{1+x}\right) \ln(1+x) \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^2} dx \\ &= 0 - \frac{1}{1+x} \Big|_0^{+\infty} = 0 - (0 - 1) = 1. \end{aligned}$$

故应填 1.

2.  $\int_{-\infty}^1 \frac{1}{x^2+2x+5} dx =$  \_\_\_\_\_.

$$\text{解} \quad \text{原式} = \int_{-\infty}^1 \frac{1}{(x+1)^2+2^2} dx = \frac{1}{2} \arctan \frac{x+1}{2} \Big|_{-\infty}^1 = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{3}{8} \pi. \text{ 故应填 } \frac{3}{8} \pi.$$

### 习题 5.6

1. 求下列曲线所围图形的面积:

(1)  $y = 8 - 2x^2$  与  $y = 0$ ;

(2)  $y = \sqrt{x}$  与  $y = x$ ;

(3)  $y = x^2$  与  $y = 2x + 3$ ;

(4)  $y = \frac{1}{x}$ ,  $y = x$  与  $x = 2$ ;

(5)  $y = \ln x$ ,  $y$  轴与  $y = \ln a$ ,  $y = \ln b$  ( $b > a > 0$ );

(6)  $y = e^x$ ,  $y = e^{-x}$  与  $x = 1$ .

解 (1) 画草图(如图 5-11(a) 所示).  $A = 2 \int_0^2 (8 - 2x^2) dx = 2 \left( 16 - \frac{2}{3} x^3 \Big|_0^2 \right) = 32 - \frac{4}{3} \times 8 = \frac{64}{3}$ .

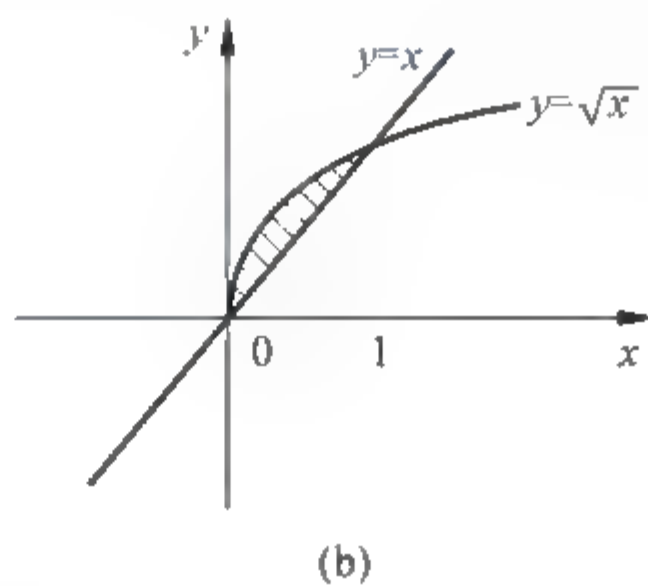
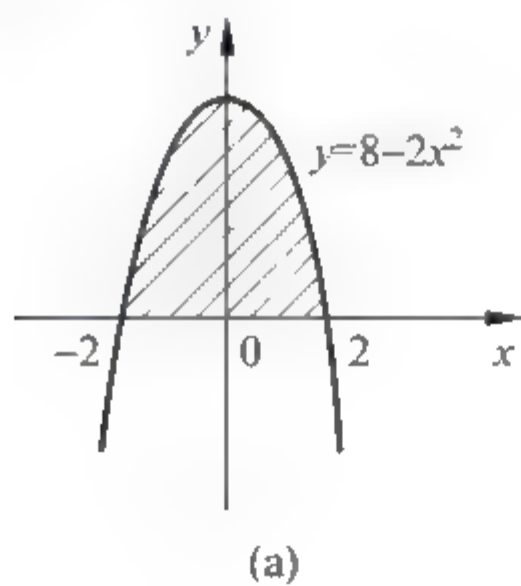


图 5-11

(2) 画草图(如图 5-11(b) 所示).  $A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x) dx = \left( \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ .

(3) 画草图(如图 5-12(a) 所示).

$$A = \int_{-1}^3 (2x + 3 - x^2) dx = x^2 \Big|_{-1}^3 + 3 \times 4 - \frac{1}{3} x^3 \Big|_{-1}^3 = 8 + 12 - \frac{1}{3} \times 28 = \frac{32}{3}.$$

(4) 画草图(如图 5-12(b) 所示).  $A = \int_1^2 \left( x - \frac{1}{x} \right) dx = \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 - \ln x \Big|_1^2 = \frac{3}{2} - \ln 2$ .

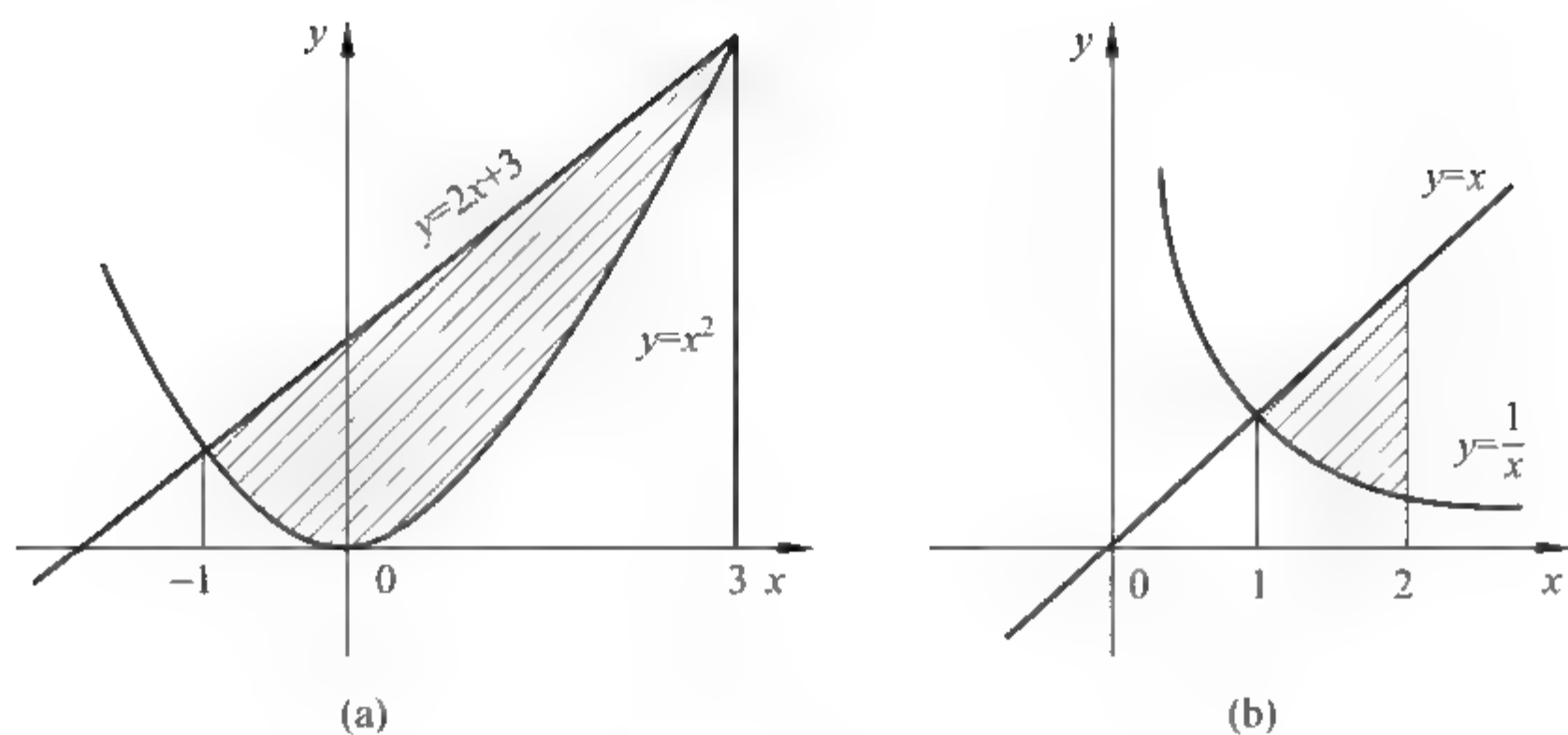


图 5-12

(5) 画草图(如图 5-13(a)所示).  $A = \int_{\ln a}^{\ln b} e^y dy = e^y \Big|_{\ln a}^{\ln b} = e^{\ln b} - e^{\ln a} = b - a.$

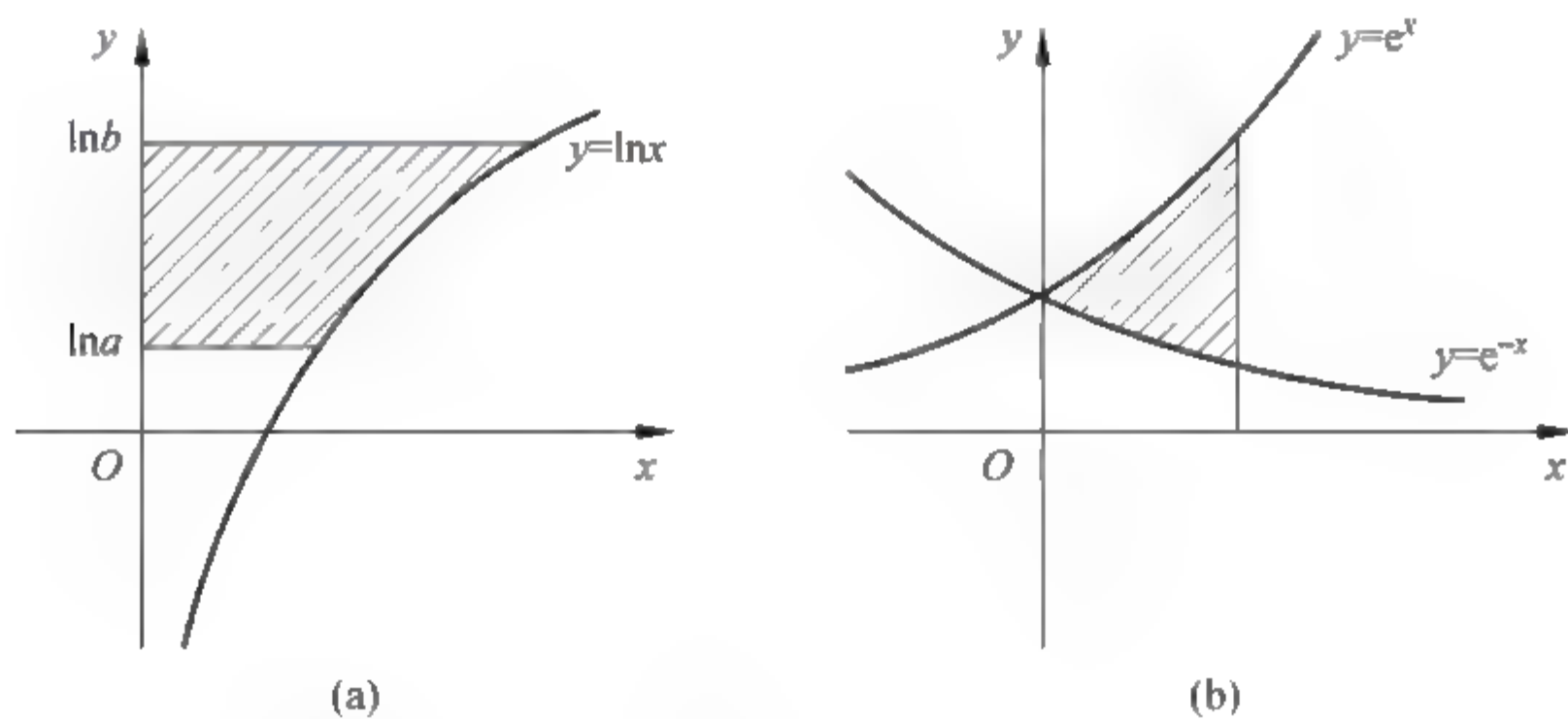


图 5-13

(6) 画草图(如图 5-13(b)所示).  $A = \int_0^1 (e^x - e^{-x}) dx = e^x \Big|_0^1 + e^{-x} \Big|_0^1 = e + e^{-1} - 2.$

2. 曲线  $y=x^2$  在点  $(1,1)$  处的切线与  $x=y^2$  所围成图形的面积.

解 画草图(如图 5-14 所示).

因  $y'=2x$ , 故  $k=2$ , 切线方程为  $y-1=2(x-1)$ , 即  $y=2x-1$ .

由  $\begin{cases} y=2x-1 \\ x=y^2 \end{cases}$ , 解得交点为  $(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$ ,  $(1,1)$ . 故

$$A = \int_{-\frac{1}{2}}^1 \left( \frac{y+1}{2} - y^2 \right) dy = \left( \frac{y^2}{4} + \frac{y}{2} - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{-\frac{1}{2}}^1 = \frac{9}{16}.$$

3. 求下列极坐标表示的曲线所围图形的面积:

(1)  $r=2a\cos\theta$ ; (2)  $r=2a(2+\cos\theta)$ ;

(3)  $r=3\cos\theta$  与  $r=1+\cos\theta$  所围图形的公共部分.

解 (1) 画草图(如图 5-15(a)所示).

$$A = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (2a\cos\theta)^2 d\theta = 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta = 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta = 2a^2 \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\sin 2\theta}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \pi a^2.$$

(2) 画草图(如图 5-15(b)所示).

$$A = 2 \int_0^{\pi} \frac{1}{2} [2a(2+\cos\theta)]^2 d\theta = 4a^2 \int_0^{\pi} (4+4\cos\theta+\cos^2\theta) d\theta = 4a^2 \int_0^{\pi} \left( 4+4\cos\theta+\frac{1+\cos 2\theta}{2} \right) d\theta$$

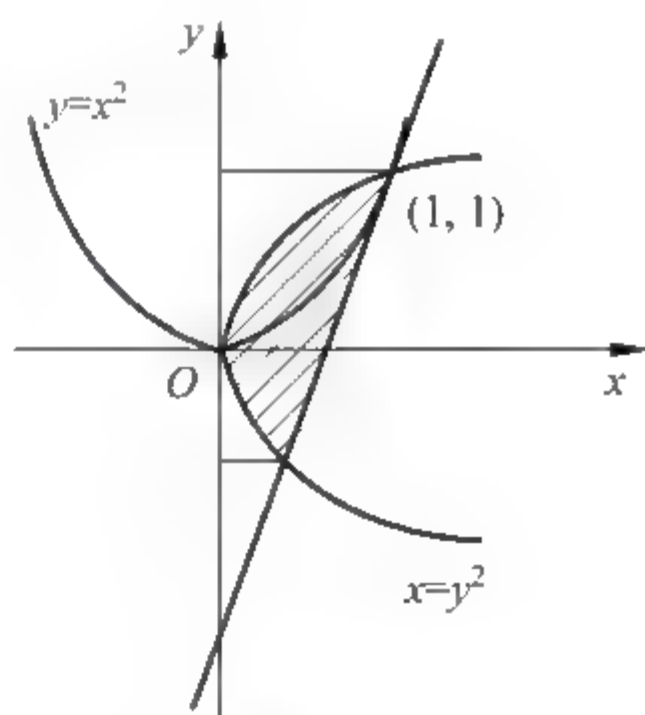


图 5-14

$$4a^2 \left( \frac{9\pi}{2} + 4\sin\theta \Big|_0^\pi + \frac{\sin 2\theta}{4} \Big|_0^\pi \right) = 18\pi a^2.$$

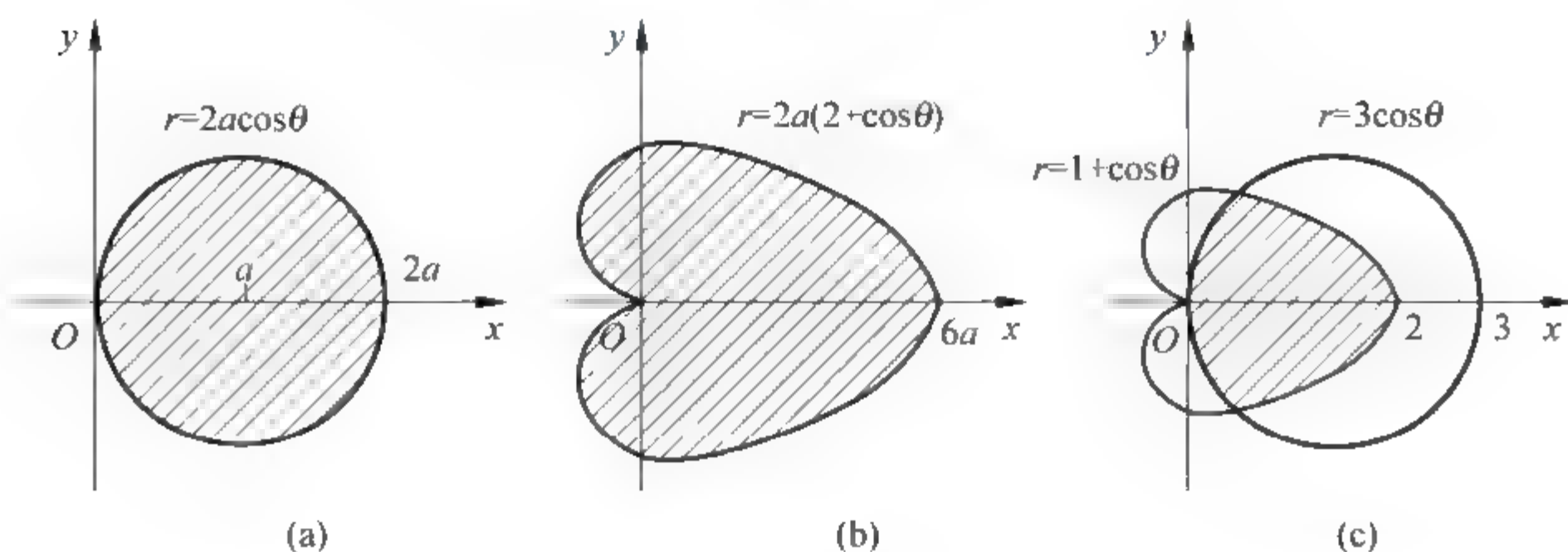


图 5-15

(3) 画草图(如图 5-15(c)所示).

$$\begin{aligned} A &= 2 \left( \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2} (1 + \cos\theta)^2 d\theta + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (3\cos\theta)^2 d\theta \right) = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta) d\theta + 9 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left( 1 + 2\cos\theta + \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) d\theta + 9 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= \frac{\pi}{3} + 2\sin\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{3} + \frac{\sin 2\theta}{4} \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + \frac{9}{2} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + \frac{\sin 2\theta}{2} \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{5\pi}{4}. \end{aligned}$$

4. 求下列已知曲线所围成的图形,按指定的轴旋转所产生的旋转体的体积:

- (1)  $y = x^2, x = y^2$ , 分别绕  $x$  轴、 $y$  轴; (2)  $y = x^3, x = 2, y = 0$ , 分别绕  $x$  轴、 $y$  轴;  
 (3)  $y = x, x = 2, y = \frac{1}{x}$ , 分别绕  $x$  轴、 $y$  轴; (4)  $y = 0, x = \frac{\pi}{2}, y = \sin x$ , 分别绕  $x$  轴、 $y$  轴.

解 (1) 画草图(如图 5-16(a)所示).

$$V_x = \int_0^1 \pi (\sqrt{x})^2 dx - \int_0^1 \pi (x^2)^2 dx = \frac{3\pi}{10}, \quad V_y = \int_0^1 \pi (\sqrt{y})^2 dy - \int_0^1 \pi (y^2)^2 dy = \frac{3\pi}{10}.$$

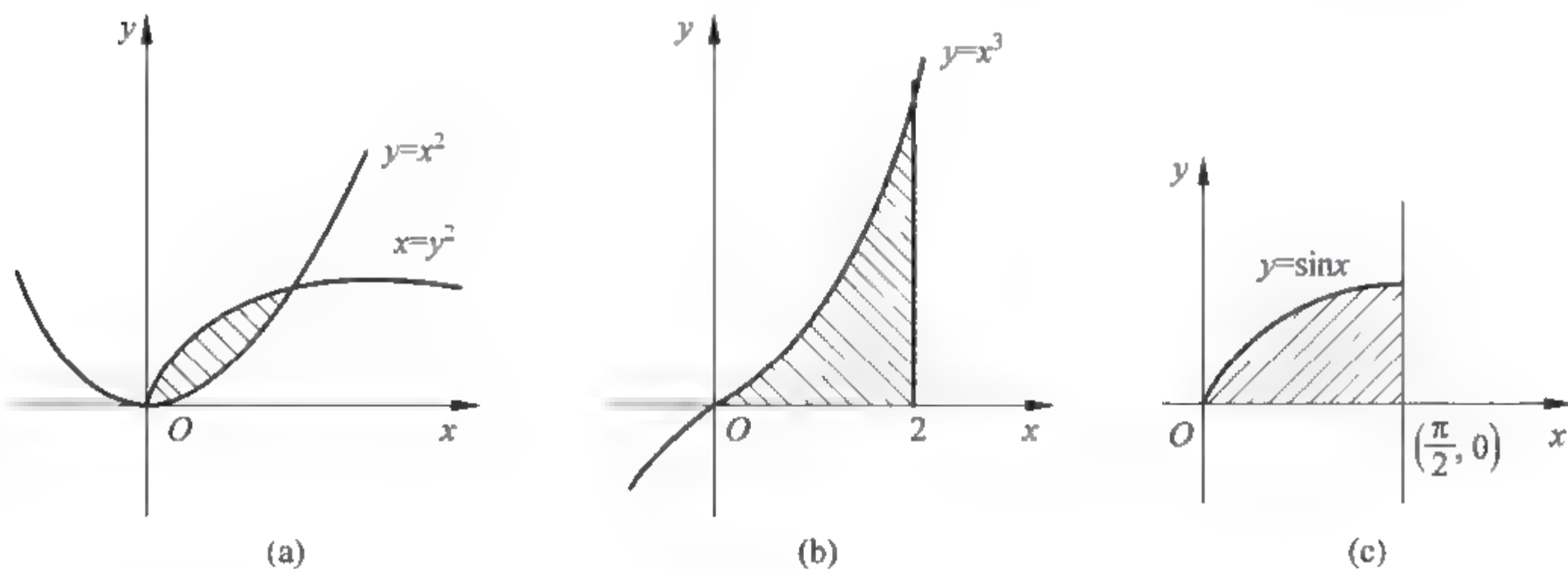


图 5-16

(2) 画草图(如图 5-16(b)所示).

$$V_x = \int_0^2 \pi (x^3)^2 dx = \frac{128\pi}{7}, \quad V_y = \pi 2^2 \times 8 - \int_0^8 \pi (\sqrt[3]{y})^2 dy = 32\pi - \frac{3}{5} \times 32\pi = \frac{64}{5}\pi.$$

(3) 草图如前面图 5-12(b)所示.

$$V_x = \int_1^2 \pi (x)^2 dx - \int_1^2 \pi \left( \frac{1}{x} \right)^2 dx = \frac{11\pi}{6}, \quad V_y = \pi 2^2 \times \frac{3}{2} - \int_{\frac{1}{2}}^1 \pi \left( \frac{1}{y} \right)^2 dy - \int_1^2 \pi y^2 dy = \frac{8}{3}\pi.$$



(4) 画草图(如图 5-16(c)所示).  $V_x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi (\sin x)^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{\pi^2}{4}$ ,

$$V_y = \pi \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 \times 1 - \int_0^1 \pi (\arcsin y)^2 dy = \frac{\pi^3}{4} - \pi y (\arcsin y)^2 \Big|_0^1 + 2 \int_0^1 \pi y \arcsin y \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy = 2\pi.$$

若对  $x$  积分, 则有  $V_y = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x f(x) dx = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx = 2\pi$ .

5. 计算由摆线  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$  的一拱, 直线  $y = 0$  所围成的图形分别绕  $x$  轴和  $y$  轴旋转而成的旋转体的体积.

解 画草图(如图 5-17 所示). 按旋转体的体积公式, 所述图形绕  $x$  轴旋转成旋转体的体积为

$$V_x = \int_0^{2\pi} \pi y^2(x) dx = \pi \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 a(1 - \cos t) dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t) dt = 5\pi^2 a^3.$$

所述图形绕  $y$  轴旋转成旋转体的体积可看成是平面图形  $OABC$  与  $OBC$  (图 5-17) 分别绕  $y$  轴旋转而成旋转体的体积之差, 因此所求的体积为

$$\begin{aligned} V_y &= \int_0^{2a} \pi x_2^2(y) dy - \int_0^{2a} \pi x_1^2(y) dy = \pi \int_{2\pi}^{\pi} a^2 (t - \sin t)^2 a \sin t dt - \pi \int_0^{\pi} a^2 (t - \sin t)^2 a \sin t dt \\ &= -\pi a^3 \int_0^{2\pi} (t - \sin t)^2 \sin t dt = 6\pi^3 a^3. \end{aligned}$$

6. 求以半径为  $R$  的圆为底、平行且等于底圆直径的线段为顶、高为  $h$  的正劈锥体的体积.

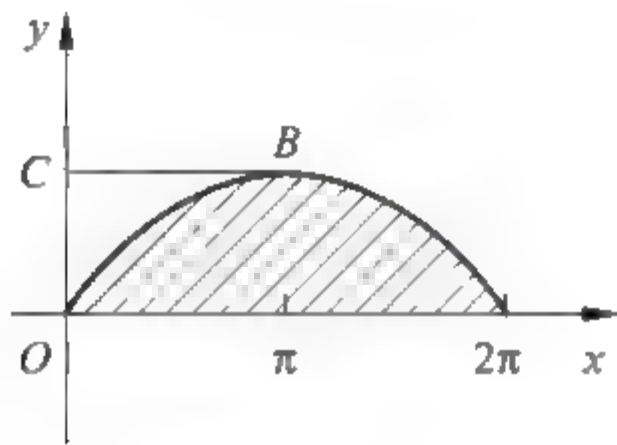


图 5-17

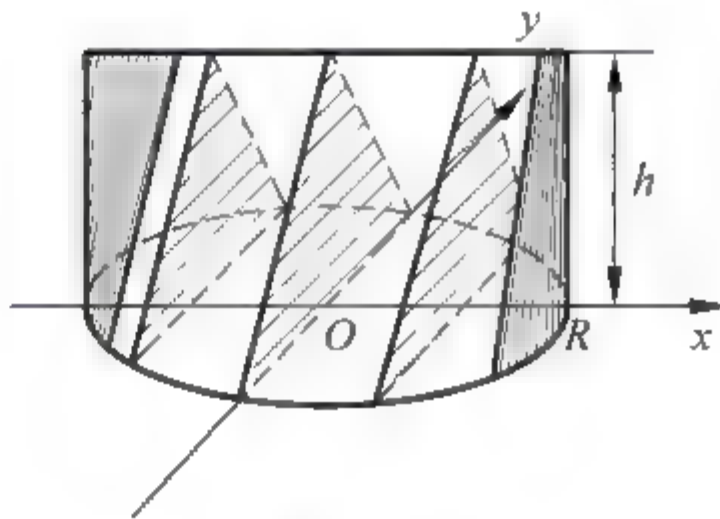


图 5-18

解 如图 5-18 所示, 取底圆所在的平面为  $xOy$  平面, 圆心  $O$  为原点, 并使  $x$  轴与正劈锥的顶平行, 底圆的方程为  $x^2 + y^2 = R^2$ .

过  $x$  轴上的点  $x$  ( $-R \leq x \leq R$ ) 作垂直于  $x$  轴的平面, 截正劈锥体得等腰三角形, 此截面的面积为  $A(x) = \frac{1}{2}h \cdot 2y = h \sqrt{R^2 - x^2}$ , 于是所求正劈锥体的体积为

$$V = \int_{-R}^R A(x) dx = h \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx = 2R^2 h \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta = \frac{\pi R^2 h}{2},$$

即正劈锥体的体积等于同底同高的圆柱体体积的一半.

7. 证明: 由平面图形  $0 < a < x < b$ ,  $0 < y < f(x)$  绕  $y$  轴旋转所得旋转体的体积为  $V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$ .

证明 体积微元  $dV = 2\pi x f(x) dx$ , 故  $V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$ .

### 提高题

1. 设位于曲线  $y = \frac{1}{\sqrt{x(1 + \ln^2 x)}}$  ( $e \leq x < +\infty$ ) 下方,  $x$  轴上方的无界区域为  $G$ , 则  $G$  绕  $x$  轴旋转一周所得空间区域的体积为 \_\_\_\_\_.

$$\text{解 } V = \int_e^{+\infty} \pi y^2(x) dx = \int_e^{+\infty} \pi \frac{1}{x(1 + \ln^2 x)} dx = \pi \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \arctan \ln x - \frac{\pi}{4} \right) = \pi \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi^2}{4}.$$

故应填  $\frac{\pi^2}{4}$ .

2. 求由曲线  $y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1+x^2+e^x}$ ,  $y = \frac{x}{2}$ ,  $y = 0$  及  $x = 1$  围成的平面图形的面积.

解  $y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1+x^2+e^x} = \begin{cases} 0, & x \geq 0, \\ \frac{x}{1+x^2}, & x < 0, \end{cases}$  故所求面积为

$$S = \int_{-1}^0 \left( \frac{x}{2} - \frac{x}{1+x^2} \right) dx + \int_0^1 \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2} \ln 2.$$

3. 设  $S_1$  是由曲线  $y = x^2$  与直线  $y = t^2$  ( $0 < t < 1$ ) 及  $y$  轴所围图形的面积,  $S_2$  是由曲线  $y = x^2$  与直线  $y = t^2$  ( $0 < t < 1$ ) 及  $x = 1$  所围图形的面积(如图 5-19 所示). 求:  $t$  取何值时,  $S(t) = S_1 + S_2$  取到极小值? 极小值是多少?

解 解法一 根据题意知

$$\begin{aligned} S(t) &= S_1 + S_2 = \left( t^3 - \int_0^t x^2 dx \right) + \left[ \int_t^1 x^2 dx - t^2(1-t) \right] \\ &= 2t^3 - t^2 - \int_0^t x^2 dx + \int_t^1 x^2 dx, \end{aligned}$$

或  $S(t) = S_1 + S_2 = \int_0^t (t^2 - x^2) dx + \int_t^1 (x^2 - t^2) dx = \frac{4}{3}t^3 - t^2 + \frac{1}{3}$ , 则

$$S'(t) = 6t^2 - 2t - t^2 - t^2 = 4t^2 - 2t = 2t(2t-1), \text{ 或 } S'(t) = 4t^2 - 2t = 2t(2t-1).$$

令  $S'(t) = 0$ , 得在  $(0, 1)$  内有驻点  $t = \frac{1}{2}$ .

显然, 当  $0 < t < \frac{1}{2}$  时,  $S'(t) < 0$ ; 当  $\frac{1}{2} < t < 1$  时,  $S'(t) > 0$  或  $S'\left(\frac{1}{2}\right) = 8 \times \frac{1}{2} - 2 = 2 > 0$ . 所以  $S(t)$  在  $t = \frac{1}{2}$  处取得极小值. 进而极小值是

$$S\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{1}{8} - \frac{1}{4} - \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 dx + \int_{\frac{1}{2}}^0 x^2 dx = -\frac{1}{3}x^3 \Big|_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}x^3 \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{4},$$

或  $S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3} \times \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$ .

解法二 根据题意知

$$S(t) = S_1 + S_2 = \int_0^{t^2} \sqrt{y} dy + \left[ (1-t^2) - \int_{t^2}^1 \sqrt{y} dy \right] = 1 - t^2 + \int_0^{t^2} \sqrt{y} dy - \int_{t^2}^1 \sqrt{y} dy,$$

或  $S(t) = S_1 + S_2 = \int_0^{t^2} \sqrt{y} dy + \int_{t^2}^1 [1 - \sqrt{y}] dy = \frac{4}{3}t^3 - t^2 + \frac{1}{3}$ , 则

$$S'(t) = -2t + 2t^2 + 2t^2 = 4t^2 - 2t = 2t(2t-1) \text{ 或 } S'(t) = 4t^2 - 2t = 2t(2t-1).$$

其余步骤同方法一.

4. 设直线  $y = ax$  与抛物线  $y = x^2$  所围成的图形的面积为  $S_1$ , 它们与直线  $x = 1$  所围成的图形的面积为  $S_2$ , 并且  $a < 1$ . 试确定  $a$  的值, 使  $S = S_1 + S_2$  达到最小, 并求出最小值.

解 画草图(如图 5-20(a)、(b)所示).

当  $0 < a < 1$  时

$$S = S_1 + S_2 = \int_0^a (ax - x^2) dx + \int_a^1 (x^2 - ax) dx = \frac{a^3}{3} - \frac{a}{2} + \frac{1}{3}, \quad S' = a^2 - \frac{1}{2}, \quad S'' = 2a.$$

令  $S' = a^2 - \frac{1}{2} = 0$  得  $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , 而  $S''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} > 0$ , 所以  $S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{6}$  是唯一的极小值也即最小值.

当  $a < 0$  时

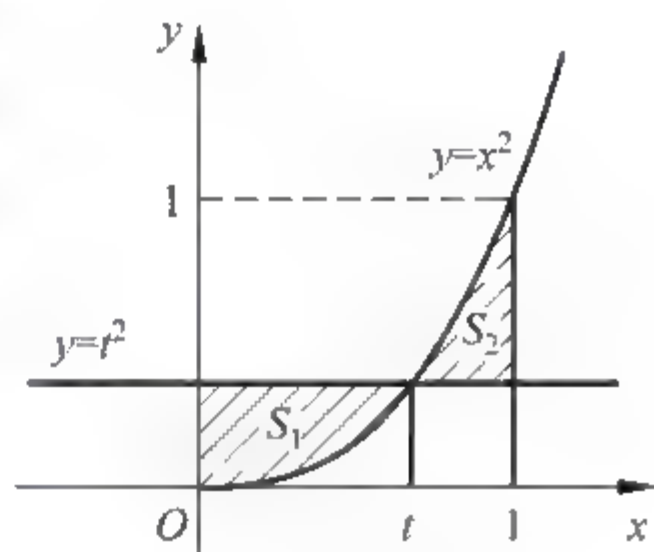


图 5-19

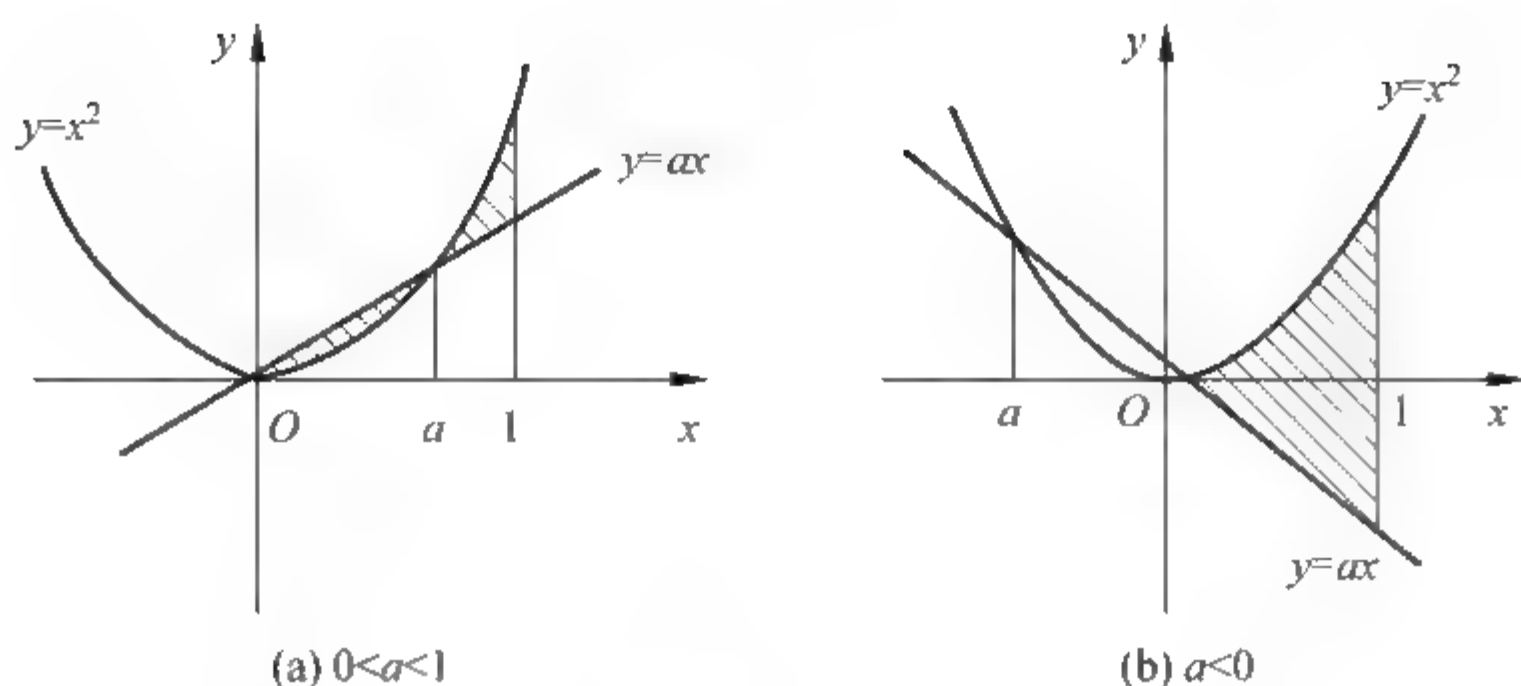


图 5-20

$$S = S_1 + S_2 = \int_a^0 (ax - x^2) dx + \int_0^1 (x^2 - ax) dx = -\frac{a^3}{6} - \frac{a}{2} + \frac{1}{3},$$

$$S' = -\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2} < 0,$$

所以  $S$  单调减少, 当  $a=0$  时,  $S$  取最小值, 此时  $S(0) = \frac{1}{3}$ .

综上所述, 当  $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$  时,  $S$  取最小值  $S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{6}$ .

5. 设  $D_1$  是由抛物线  $y=2x^2$  和直线  $x=a, x=2$  及  $y=0$  所围成的平面区域;  $D_2$  是由抛物线  $y=2x^2$  和直线  $y=0, x=a$  所围成的平面区域, 其中  $0 < a < 2$ .

(1) 试求  $D_1$  绕  $x$  轴旋转而成的旋转体的体积  $V_1$  及  $D_2$  绕  $y$  轴旋转而成的旋转体的体积  $V_2$ ;

(2) 问当  $a$  为何值时,  $V_1 + V_2$  取得最大值? 试求此最大值.

解 如图 5-21 所示.

(1) 由题设及旋转体体积公式, 有

$$V_1 = \pi \int_a^2 (2x^2)^2 dx = \frac{4\pi}{5} (32 - a^5),$$

$$V_2 = \pi a^2 \cdot 2a^2 - \pi \int_0^{2a^2} \frac{y}{2} dy = 2\pi a^4 - \pi a^4 = \pi a^4.$$

(2) 设  $V = V_1 + V_2 = \frac{4\pi}{5} (32 - a^5) + \pi a^4$ . 令  $V' = 4\pi a^3 (1 - a) = 0$ , 得  $(0, 2)$  内的唯一驻点  $a=1$ .

当  $0 < a < 1$  时,  $V' > 0$ ; 当  $1 < a < 2$  时,  $V' < 0$ . 故  $a=1$  是极大值点, 亦即最大值点, 此时  $V_1 + V_2$  取得最大值  $\frac{129}{5}\pi$ .

6. 设平面图形  $A$  由  $x^2 + y^2 \leq 2x$  与  $y \geq x$  所确定, 求图形  $A$  绕直线  $x=2$  旋转一周所得旋转体的体积.

解 以  $y$  为积分变量, 它的最大范围为  $0 \leq y \leq 1$ , 在其上固定一点, 过此点作平行于  $x$  轴的平行线, 这条平行线与图形  $A$  的两条边界线  $x=y, x=1-\sqrt{1-y^2}$  相交, 它们与旋转轴之间的距离分别为  $2-y, 2-(1-\sqrt{1-y^2})$ , 则所求体积为

$$V = \pi \int_0^1 \{ [2 - (1 - \sqrt{1-y^2})]^2 - (2-y)^2 \} dy = 2\pi \int_0^1 [\sqrt{1-y^2} - (1-y)^2] dy$$

$$= 2\pi \left[ \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3} (1-y)^3 \right]_0^1 = \frac{\pi^2}{2} - \frac{2\pi}{3}.$$

### 习题 5.7

1. 某企业生产  $x$  吨产品时的边际成本为  $C'(x) = \frac{1}{50}x + 30$  (元/吨), 且固定成本为 900 元, 试求产量为

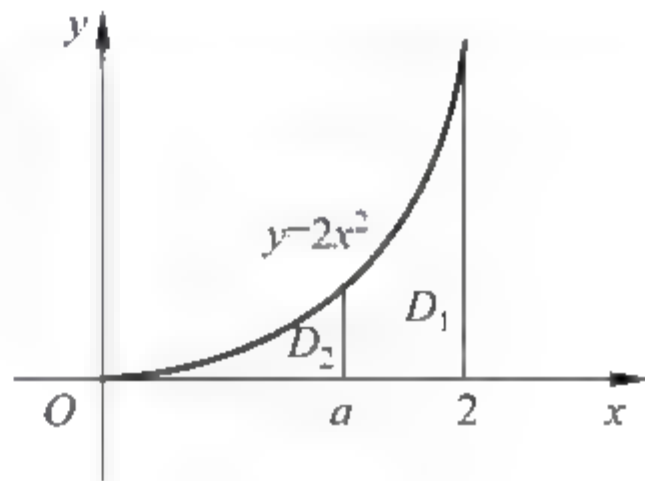


图 5-21



多少时平均成本最低?

解 首先求出成本函数.

$$C(x) = \int_0^x C'(t) dt + C_0 = \int_0^x \left( \frac{1}{50}t + 30 \right) dt + 900 = \frac{1}{100}x^2 + 30x + 900,$$

故得平均成本函数为  $\bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{1}{100}x + 30 + \frac{900}{x}$ ,  $\bar{C}'(x) = \frac{1}{100} - \frac{900}{x^2}$ .

令  $\bar{C}' = 0$ , 得  $x_1 = 300$  ( $x_2 = -300$  舍去), 因此,  $\bar{C}(x)$  仅有一个驻点  $x_1 = 300$ . 再由实际问题本身可知  $\bar{C}(x)$  有最小值. 故当产量为 300 吨时, 平均成本最低.

2. 已知某产品生产  $x$  件时, 边际成本  $C'(x) = 0.4x - 12$  (元/件), 固定成本 200 元. (1) 求其成本函数. (2) 若此种商品的售价为 20 元且可全部售出, 求其利润函数  $L(x)$ , 并求产量为多少时所获得的利润最大.

解 由已知条件得  $C'(x) = 0.4x - 12$ ,  $C(0) = 200$ . 因此生产  $x$  件商品的总成本为

$$C(x) = \int_0^x C'(t) dt + C(0) = \int_0^x (0.4t - 12) dt + 200 = 0.2x^2 - 12x + 200 \text{ (元)}.$$

销售收入为  $R(x) = 20x$  (元)

$$L(x) = R(x) - C(x) = 20x - (0.2x^2 - 12x + 200) = -0.2x^2 + 32x - 200 \text{ (元)}.$$

令  $L'(x) = -0.4x + 32 = 0$ , 得唯一驻点  $x = 80$ . 又  $L''(x) = -0.4$ , 所以当  $x = 80$  时所得到的利润最大, 最大利润为  $L(80) = -0.2 \times 80^2 + 32 \times 80 - 200 = 1080$  元.

3. 某种商品的成本函数  $C(x)$  (万元), 其边际成本为  $C'(x) = 1$ , 边际收益是生产量  $x$  (百台) 的函数, 即  $R'(x) = 5 - x$ . (1) 求生产量为多少时, 总利润最大? (2) 从利润量最大的生产量又生产了 100 台, 总利润减少多少

解 (1) 当  $R'(x) = C'(x)$  时, 利润最大, 即当  $5 - x = 1$ ,  $x = 4$  时, 总利润最大.

(2)  $\Delta L = \int_4^5 R'(x) dx - \int_4^5 C'(x) dx = \int_4^5 (5 - x - 1) dx = \int_4^5 (4 - x) dx = -0.5$ , 所以总利润减少 0.5 万元.

4. 已知对某商品的需求量是价格  $P$  的函数, 且边际需求  $Q'(P) = -4$ , 该商品的最大需求量为 80 (即  $P = 0$  时,  $Q = 80$ ), 求需求量与价格的函数关系.

解 由边际需求的不定积分公式, 可得需求量

$$Q(P) = \int Q'(P) dP = \int -4 dP = -4P + C \quad (C \text{ 为积分常数}).$$

代入  $Q(P)|_{P=0} = 80$ , 得  $C = 80$ , 于是需求量与价格的函数关系是  $Q(P) = -4P + 80$ .

本例也可由变上限的定积分公式直接求得

$$Q(P) = \int_0^P Q'(t) dt + Q(0) = \int_0^P (-4) dP + 80 = -4P + 80.$$

### 提高题

1. 若一企业生产某产品的边际成本是产量  $x$  的函数  $C'(x) = 2e^{0.2x}$ , 固定成本  $C_0 = 90$ , 求总成本函数.

解 由定积分得  $C(x) = \int_0^x C'(t) dt + 90 = \frac{2}{0.2} e^{0.2x} \Big|_0^x + 90 = 10e^{0.2x} + 80$ , 于是总成本函数为  $C(x) = 10e^{0.2x} + 80$ .

2. 有一个大型投资项目, 投资成本为  $A = 10000$  (万元), 投资年利率为 5%, 每年的均匀收入率为  $a = 2000$  (万元), 求该投资为无限期时的纯收入的贴现值 (或称为投资的资本价值).

解 由已知条件收入率为  $a = 2000$  (万元), 年利率  $r = 5\%$ , 故无限期的投资的总收入的贴现值为

$$y = \int_0^{+\infty} a e^{-rt} dt = \int_0^{+\infty} 2000 e^{-0.05t} dt = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b 2000 e^{-0.05t} dt = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{2000}{0.05} [1 - e^{-0.05b}]$$

$$= 2000 \times \frac{1}{0.05} = 40000 \text{ (万元)},$$

从而投资为无限期时的纯收入贴现值为

$$R = y \quad A = 40000 - 10000 = 30000(\text{万元}) = 3 \text{ 亿元}.$$

### 总复习题 5

#### 1. 填空题

(1) 设  $f(x)$  为连续函数, 则  $\int_2^3 f(x) dx + \int_3^1 f(u) du + \int_1^2 f(t) dt =$  \_\_\_\_\_.

(2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin^2 t dt}{x^3} =$  \_\_\_\_\_.

(3) 函数  $F(x) = \int_1^x (1 - \ln \sqrt{t}) dt (x > 0)$  的递减区间为 \_\_\_\_\_.

(4) 已知  $\int_0^1 f(x) dx = 1, f(1) = 0$ , 则  $\int_0^1 x f'(x) dx =$  \_\_\_\_\_.

(5) 设  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1, a$  为常数,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+a} f(x) dx =$  \_\_\_\_\_.

解 (1) 0; (2)  $\frac{1}{3}$ ; (3)  $[e^2, +\infty)$ ; (4) -1; (5)  $a$ .

#### 2. 选择题

(1) 在下列积分中, 其值为 0 的是( ).

A.  $\int_{-1}^1 |\sin 2x| dx$       B.  $\int_{-1}^1 \cos 2x dx$       C.  $\int_{-1}^1 x \sin x dx$       D.  $\int_{-1}^1 \sin 2x dx$

(2) 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上非负, 在  $(a, b)$  内  $f'(x) > 0, f'(x) < 0, I_1 = \frac{b-a}{2} [f(b) + f(a)], I_2 = \int_a^b f(x) dx, I_3 = (b-a)f(b)$ , 则  $I_1, I_2, I_3$  的大小关系为( ).

A.  $I_1 \leq I_2 \leq I_3$       B.  $I_2 \leq I_3 \leq I_1$       C.  $I_1 \leq I_3 \leq I_2$       D.  $I_3 \leq I_2 \leq I_1$

(3) 设  $\Phi(x) = \int_0^x \sin(x-t) dt$ , 则  $\Phi'(x)$  等于( ).

A.  $\cos x$       B.  $-\sin x$       C.  $\sin x$       D. 0

(4) 定积分  $\int_{-1}^1 x^{2002} (e^x - e^{-x}) dx$  的值为( ).

A. 0      B.  $2002! \left(e - \frac{1}{e}\right)$       C.  $2003! \left(e - \frac{1}{e}\right)$       D.  $2001! \left(e - \frac{1}{e}\right)$

(5) 设  $f(x) = \int_0^{\sin x} \sin t^2 dt, g(x) = x^3 + x^4$ , 则当  $x \rightarrow 0$  时,  $f(x)$  是  $g(x)$  的( ) 无穷小量.

A. 等价      B. 同阶但非等价      C. 高阶      D. 低阶

解 (1) D; (2) D; (3) C; (4) A; (5) B.

#### 3. 求极限:

(1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + 3k^2};$

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \frac{i}{n}};$

(3)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x}{x-a} \int_a^x f(t) dt$ , 其中  $f(x)$  连续;

(4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{2x}^0 e^{-t^2} dt}{e^x - 1}.$

解 (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + 3k^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + 3 \left(\frac{k}{n}\right)^2} \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1}{1 + 3x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \sqrt{3}x \Big|_0^1 = \frac{\sqrt{3}\pi}{9}.$

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \frac{i}{n}} = \int_0^1 \sqrt{1+x} dx = \frac{2}{3} (1+x)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{2}{3} [2\sqrt{2} - 1].$

(3)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x}{x-a} \int_a^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\left(x \int_a^x f(t) dt\right)'}{(x-a)'} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\int_a^x f(t) dt + x f(x)}{1} = a f(a).$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{2x}^0 e^{-t^2} dt}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{-4x^2}}{e^x} = 2.$$

4. 估计积分  $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx$  的值.

解  $f(x) = \frac{\sin x}{x}, x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right], f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x(x - \tan x)}{x^2} < 0,$

$f(x)$  在  $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$  上单调下降, 故区间端点即为极值点.

$M = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}, m = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}$ , 因为  $b - a = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ , 所以

$$\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} \leq \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx \leq \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4}, \quad \text{即} \quad \frac{1}{2} < \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

5. 求下列函数的导数:

(1)  $\frac{d}{dx} \int_0^x \sin(x-t)^2 dt$ ; (2)  $\frac{d}{dx} \int_0^x t f(x^2 - t^2) dt$ , 其中  $f(x)$  是连续函数.

解 (1) 设  $u = x - t$ , 则  $du = -dt$ ,  $\int_0^x \sin(x-t)^2 dt = -\int_x^0 \sin u^2 du$ , 故

$$\frac{d}{dx} \int_0^x \sin(x-t)^2 dt = -\frac{d\left(\int_x^0 \sin u^2 du\right)}{dx} = \sin x^2.$$

(2) 设  $u = x^2 - t^2$ , 则  $du = -2t dt$ ,  $\int_0^x t f(x^2 - t^2) dt = -\frac{1}{2} \int_{x^2}^0 f(u) du = \frac{1}{2} \int_0^{x^2} f(u) du$ , 故

$$\frac{d}{dx} \int_0^x t f(x^2 - t^2) dt = \frac{1}{2} \frac{d\left(\int_0^{x^2} f(u) du\right)}{dx} = x f(x^2).$$

6. 设函数  $y = y(x)$  由方程  $\int_0^{y^2} e^{-t} dt + \int_x^0 \cos t^2 dt = 0$  所确定, 求  $\frac{dy}{dx}$ .

解 在方程两边同时对  $x$  求导得  $\frac{d}{dx} \left( \int_0^{y^2} e^{-t} dt \right) + \frac{d}{dx} \left( \int_x^0 \cos t^2 dt \right) = 0$ , 于是

$$\frac{d}{dy} \left( \int_0^{y^2} e^{-t} dt \right) \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{d}{dx} \left( \int_x^0 \cos t^2 dt \right) = 0,$$

即  $e^{-y^2} \cdot (2y) \cdot \frac{dy}{dx} + (-\cos x^2) = 0$ , 故  $\frac{dy}{dx} = \frac{e^{y^2} \cos x^2}{2y} (y \neq 0)$ .

7. 设  $f(x)$  连续且满足  $\int_0^{x^2(1+x)} f(t) dt = x$ , 求  $f(2)$ .

解 把  $\int_0^{x^2(1+x)} f(t) dt = x$  两边对  $x$  求导得  $f(x^2(1+x))(2x+3x^2) = 1$ .

令  $x = 1$  得  $f(2)(2+3) = 1$ , 即  $f(2) = \frac{1}{5}$ .

8. 已知  $f(x) = x^2 - x \int_0^2 f(x) dx + 2 \int_0^1 f(x) dx$ , 求  $f(x)$ .

解 原等式两端分别从 0 到 1 和从 0 到 2 积分得 (注意  $\int_0^2 f(x) dx, \int_0^1 f(x) dx$  是常数)

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 x^2 dx - \int_0^1 x dx \cdot \int_0^2 f(x) dx + 2 \int_0^1 f(x) dx, \\ \int_0^2 f(x) dx &= \int_0^2 x^2 dx - \int_0^2 x dx \cdot \int_0^2 f(x) dx + 4 \int_0^1 f(x) dx, \end{aligned}$$

即

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \int_0^2 f(x) dx + 2 \int_0^1 f(x) dx, \quad \int_0^2 f(x) dx = \frac{8}{3} - 2 \int_0^2 f(x) dx + 4 \int_0^1 f(x) dx.$$



从以上两式可解得  $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{3}$ ,  $\int_0^2 f(x) dx = \frac{4}{3}$ , 故  $f(x) = x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$ .

9. 设  $F(x) = \int_0^x e^{\frac{t^2}{2}} dt$ ,  $x \in (-\infty, +\infty)$ , 求曲线  $y = F(x)$  在拐点处的切线方程.

解  $F'(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$ ,  $F''(x) = xe^{\frac{x^2}{2}}$ , 令  $F'' = 0$  得拐点  $(0, 0)$ , 从而得切线斜率为  $k = 1$ , 切线方程为  $y = x$ .

10. 设  $f(x)$  和  $g(x)$  均为  $[a, b]$  上的连续函数, 证明: 至少存在一点  $\xi \in (a, b)$ , 使

$$f(\xi) \int_{\xi}^b g(x) dx = g(\xi) \int_a^{\xi} f(x) dx.$$

证明 设  $F(x) = \int_a^x f(t) dt \cdot \int_x^b g(t) dt$ , 则  $F(x)$  在  $[a, b]$  上连续,  $F(x)$  在  $(a, b)$  内可导, 且

$$F(a) = F(b) = 0, \quad F'(x) = f(x) \int_x^b g(t) dt - g(x) \int_a^x f(t) dt.$$

由罗尔定理, 存在  $\xi \in (a, b)$ , 有  $F'(\xi) = 0$ , 即  $f(\xi) \int_{\xi}^b g(x) dx = g(\xi) \int_a^{\xi} f(x) dx$ .

11. 设  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  内连续且  $f(x) > 0$ . 证明函数  $F(x) = \frac{\int_0^x tf(t) dt}{\int_0^x f(t) dt}$  在  $(0, +\infty)$  内为单调增加函数.

证明 因为  $\frac{d}{dx} \int_0^x tf(t) dt = xf(x)$ ,  $\frac{d}{dx} \int_0^x f(t) dt = f(x)$ , 所以

$$F'(x) = \frac{xf(x) \int_0^x f(t) dt - f(x) \int_0^x tf(t) dt}{\left(\int_0^x f(t) dt\right)^2} = \frac{f(x) \int_0^x (x-t)f(t) dt}{\left(\int_0^x f(t) dt\right)^2}.$$

因为  $f(x) > 0 (x > 0)$ , 所以  $\int_0^x f(t) dt > 0$ , 同理  $\int_0^x (x-t)f(t) dt > 0$ , 故得  $F'(x) > 0 (x > 0)$ , 即  $F(x)$

在  $(0, +\infty)$  内为单调增加函数.

12. 求下列定积分:

$$(1) \int_0^{\pi} (\sin^2 x - \sin^3 x) dx; \quad (2) \int_0^3 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}; \quad (3) \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{8-2x^2} dx; \quad (4) \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2} dx.$$

解 (1)  $\int_0^{\pi} (\sin^2 x - \sin^3 x) dx = \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx + \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 x) d\cos x$

$$= \left. \frac{\pi}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \right|_0^{\pi} + \left. \left( \cos x - \frac{\cos^3 x}{3} \right) \right|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{3}.$$

$$(2) \int_0^3 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = 2 \int_0^3 \frac{d\sqrt{x}}{1+(\sqrt{x})^2} = 2 \arctan \sqrt{x} \Big|_0^3 = \frac{2}{3} \pi.$$

(3) 设  $x = 2\sin t$ , 则  $dx = 2\cos t dt$ , 于是

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 2\sqrt{2}\cos t \cdot 2\cos t dt = 8\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt = 8\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt \\ &= 8\sqrt{2} \left( \frac{\pi}{8} + \frac{\sin 2t}{4} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \right) = \sqrt{2}(\pi + 2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2} dx &= \int_0^1 \ln(1+x) d\left(\frac{1}{2-x}\right) = \left[ \ln(1+x) \frac{1}{2-x} \right] \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(2-x)} dx \\ &= \ln 2 - \frac{1}{3} \int_0^1 \left( \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2-x} \right) dx = \ln 2 - \frac{1}{3} \ln \left| \frac{1+x}{2-x} \right| \Big|_0^1 \\ &= \ln 2 - \frac{1}{3} \left( \ln 2 - \ln \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{3} \ln 2. \end{aligned}$$

13. 设  $\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{(x+2)^2} dx = A$ , 求  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{x+1} dx$ .

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{x+1} dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{x+1} dx \stackrel{x=\frac{t}{2}}{\substack{dx=\frac{1}{2}dt \\ \frac{t}{2}+1}} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{\frac{t}{2}+1} \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t+2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{1}{t+2} d(-\cos t) = \frac{1}{2} \left[ \frac{-\cos t}{t+2} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\cos t}{(t+2)^2} dt \right] \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\pi+2} + \frac{1}{2} - A \right). \end{aligned}$$

14. 设  $f(x)$  在  $[0, 2a]$  上连续, 则  $\int_0^{2a} f(x) dx = \int_0^a [f(x) + f(2a-x)] dx$ .

证明  $\int_0^{2a} f(x) dx = \int_0^a f(x) dx + \int_a^{2a} f(x) dx$ . 令  $x = 2a - u$ , 则  $dx = -du$ , 于是

$$\int_a^{2a} f(x) dx = \int_a^0 f(2a-u) du = \int_0^a f(2a-x) dx,$$

$$\text{故} \int_0^{2a} f(x) dx = \int_0^a [f(x) + f(2a-x)] dx.$$

15. 证明  $\int_x^1 \frac{dx}{1+x^2} = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{dx}{1+x^2} (x > 0)$ .

证明 令  $x = \frac{1}{u}$ , 则  $dx = -\frac{1}{u^2} du$ , 于是

$$\int_x^1 \frac{dx}{1+x^2} = - \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{1}{1+\frac{1}{u^2}} \cdot \frac{1}{u^2} du = - \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{du}{1+u^2} = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{du}{1+u^2} = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{dx}{1+x^2}.$$

16. 设  $f(x), g(x)$  在区间  $[-a, a] (a > 0)$  上连续,  $g(x)$  为偶函数, 且  $f(x)$  满足条件  $f(x) + f(-x) = A$  ( $A$  为常数).

(1) 证明:  $\int_{-a}^a f(x)g(x) dx = A \int_0^a g(x) dx$ ;

(2) 利用(1)结论计算定积分  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| \arctan e^x dx$ .

证明 (1) 因为  $\int_{-a}^a f(x)g(x) dx = \int_{-a}^0 f(x)g(x) dx + \int_0^a f(x)g(x) dx$ , 在上式右端第一项中, 设  $x = -t$ , 则  $dx = -dt$ , 于是  $\int_{-a}^0 f(x)g(x) dx = \int_a^0 f(-t)g(-t)(-dt) = \int_0^a f(-t)g(-t) dt$ .

又  $g(x)$  为偶函数, 所以  $\int_{-a}^0 f(x)g(x) dx = \int_0^a f(-x)g(x) dx$ , 于是

$$\int_{-a}^a f(x)g(x) dx = \int_0^a [f(-x)g(x) + f(x)g(x)] dx = \int_0^a [f(-x) + f(x)] g(x) dx = A \int_0^a g(x) dx.$$

(2) 因为  $g(x) = |\sin x|$  是偶函数, 设  $f(x) = \arctan e^x$ , 则

$$h(x) = f(x) + f(-x) = \arctan e^x + \arctan e^{-x}, \quad h'(x) = \frac{e^x}{1+e^{2x}} + \frac{e^{-x}}{1+e^{-2x}} = 0,$$

故  $h(x) = c$  ( $c$  为常数). 令  $x=0$ , 得  $h(x) = f(x) + f(-x) = \frac{\pi}{2}$ , 于是

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| \arctan e^x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{\pi}{2}.$$

17. 设  $f(x)$  是以  $T$  为周期的连续函数, 证明对任意实数  $a$ , 有  $\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$ . 并求

$$\int_0^{100\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx.$$

证明  $\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_a^0 f(x) dx + \int_0^T f(x) dx + \int_T^{a+T} f(x) dx$ .

对  $\int_T^{a+T} f(x) dx$ , 令  $x = t + T$ , 则  $dx = dt$ , 于是  $\int_T^{a+T} f(x) dx = \int_0^a f(t+T) dt = \int_0^a f(t) dt = \int_0^a f(x) dx$ , 故

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_a^0 f(x) dx + \int_0^T f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = \int_0^T f(x) dx.$$

$$\int_0^{100\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx = 100 \int_0^\pi \sqrt{1 - \cos 2x} dx = 100 \int_0^\pi \sqrt{2} \sin x dx = 100 \sqrt{2} (-\cos x) \Big|_0^\pi = 200\sqrt{2}.$$

18. 设  $f(x)$  是以  $\pi$  为周期的连续函数, 证明:  $\int_0^{2\pi} (\sin x + x) f(x) dx = \int_0^\pi (2x + \pi) f(x) dx$ .

证明  $\int_0^{2\pi} (\sin x + x) f(x) dx = \int_0^\pi (\sin x + x) f(x) dx + \int_\pi^{2\pi} (\sin x + x) f(x) dx.$

令  $x = \pi + u$ , 则  $\int_\pi^{2\pi} (\sin x + x) f(x) dx = \int_0^\pi [\sin(\pi + u) + \pi + u] f(\pi + u) du.$

因为  $f(x)$  以  $\pi$  为周期, 所以

$$\int_\pi^{2\pi} (\sin x + x) f(x) dx = \int_0^\pi (-\sin u + \pi + u) f(u) du = \int_0^\pi (-\sin x + \pi + x) f(x) dx,$$

故

$$\int_0^{2\pi} (\sin x + x) f(x) dx = \int_0^\pi (\sin x + x) f(x) dx + \int_0^\pi (-\sin x + \pi + x) f(x) dx = \int_0^\pi (2x + \pi) f(x) dx.$$

19. 设  $f(x), g(x)$  都是  $[a, b]$  上的连续函数, 且  $g(x)$  在  $[a, b]$  上不变号, 证明: 至少存在一点  $\xi \in [a, b]$ , 使下列等式成立  $\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx$ . 这一结果称为积分第一中值定理.

证明 不妨设在  $[a, b]$  上  $g(x) \geq 0$ , 因为  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 必有最大值  $M$ , 最小值  $m$ , 所以

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x), \text{ 且 } \int_a^b g(x) dx \geq 0.$$

上式两边积分得  $\int_a^b mg(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq \int_a^b Mg(x) dx$ , 即

$$m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx.$$

当  $\int_a^b g(x) dx > 0$  时, 有  $m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} \leq M$ , 记  $\frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} = \mu$ , 则有  $m \leq \mu \leq M$ . 因为  $f(x)$

在  $[a, b]$  上连续, 由介值定理必有  $\xi \in [a, b]$ , 使得  $f(\xi) = \mu$ , 即  $\frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} = f(\xi)$ , 所以

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx.$$

当  $\int_a^b g(x) dx = 0$  时, 有  $g(x) = 0, x \in [a, b]$ , 于是  $\int_a^b f(x)g(x) dx = 0$ , 在  $[a, b]$  上任取一点  $\xi$ , 都有  $\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx$ .

综上所述可得  $\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx (a \leq \xi \leq b)$ . 同理可证  $g(x) \leq 0$  的情形.

20. 已知  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ , 求  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$ .

解  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \int_0^{+\infty} \sin^2 x d\left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{\sin^2 x}{x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2\sin x \cos x}{x} dx$

$$= 0 + \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x} dx \xrightarrow{\substack{x = \frac{t}{2} \\ dx = \frac{1}{2} dt}} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\frac{t}{2}} \cdot \frac{1}{2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$



21. 判断积分  $\int_{2/\pi}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx$  的收敛性.

解 原式  $= -\int_{2/\pi}^{+\infty} \sin \frac{1}{x} d\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{2/\pi}^b \sin \frac{1}{x} d\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\cos \frac{1}{x}\right) \Big|_{2/\pi}^b$   
 $= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\cos \frac{1}{b} - \cos \frac{\pi}{2}\right) = 1,$

故收敛.

22. 判断积分  $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$  的收敛性.

解 因为  $x=1$  为瑕点, 则  $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} + \int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}.$

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \frac{1}{1-2/3} (x-1)^{1/3} \Big|_0^1 = 3, \quad \int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \frac{1}{1-2/3} (x-1)^{1/3} \Big|_1^3 = 3\sqrt[3]{2},$$

所以  $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = 3(1+\sqrt[3]{2})$ , 故收敛.

23. 求抛物线  $y = -x^2 + 4x - 3$  及其在点  $(0, -3)$  和  $(3, 0)$  处的切线所围成的图形的面积.

解 画草图 5-22. 因为  $y'(0) = 4, y'(3) = -2$ , 曲线在  $(0, -3)$  处的切线方程为  $y + 3 = 4x$ , 即  $y = 4x - 3$ , 曲线在  $(3, 0)$  处的切线方程为  $y = -2(x - 3)$ , 即  $y = -2x + 6$ .

由  $\begin{cases} y = 4x - 3, \\ y = -2x + 6 \end{cases}$  得两切线的交点为  $\left(\frac{3}{2}, 3\right)$ , 则所求面积为

$$A = \int_0^{\frac{3}{2}} [4x - 3 - (-x^2 + 4x - 3)] dx + \int_{\frac{3}{2}}^3 [-2x + 6 - (-x^2 + 4x - 3)] dx$$

$$= \int_0^{\frac{3}{2}} x^2 dx + \int_{\frac{3}{2}}^3 (x^2 - 6x + 9) dx = \left(\frac{1}{3}x^3\right) \Big|_0^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x\right) \Big|_{\frac{3}{2}}^3 = \frac{9}{4}.$$

24. 求曲线  $y = -x^3 + x^2 + 2x$  与  $x$  轴所围成的图形的面积.

解 画草图 5-23.  $A = -\int_{-1}^0 (-x^3 + x^2 + 2x) dx + \int_0^2 (-x^3 + x^2 + 2x) dx = \frac{37}{12}.$

25. 求位于曲线  $y = e^x$  下方, 该曲线过原点的切线的左方以及  $x$  轴上方之间的图形的面积.

解 画草图 5-24. 设  $y = e^x$  的过原点的切线为  $y = kx$ , 切点为  $A(x_0, y_0)$ . 则  $k = y'(x_0) = e^x|_{x=x_0} = e^{x_0}$ , 切线为  $y = e^{x_0}x$ . 将  $(x_0, y_0)$  代入  $y = e^x$  和  $y = e^{x_0}x$  有  $y_0 = e^{x_0} = e^{x_0}x_0$ . 从而  $x_0 = 1$ , 故  $k = e$ , 所以

$$A = \int_{-\infty}^0 e^x dx + \int_0^1 (e^x - ex) dx = e^x \Big|_{-\infty}^0 + \left(e^x - \frac{ex^2}{2}\right) \Big|_0^1 - e^x \Big|_{-\infty}^1 - \frac{ex^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{e}{2}.$$

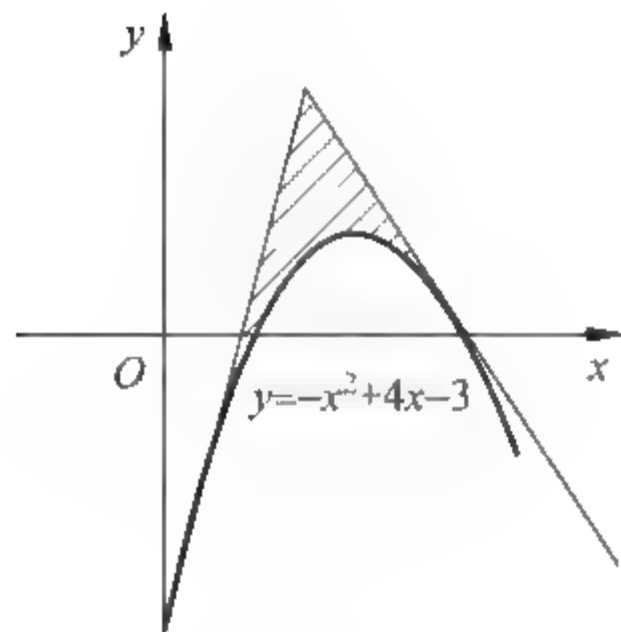


图 5-22

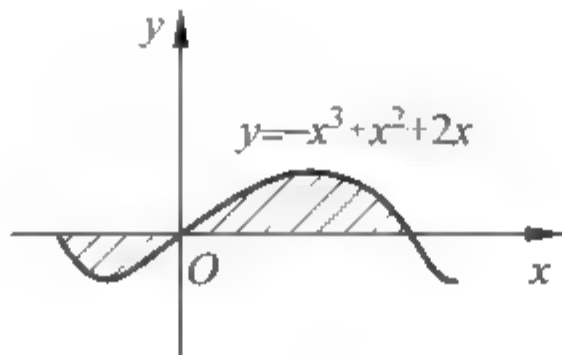


图 5-23

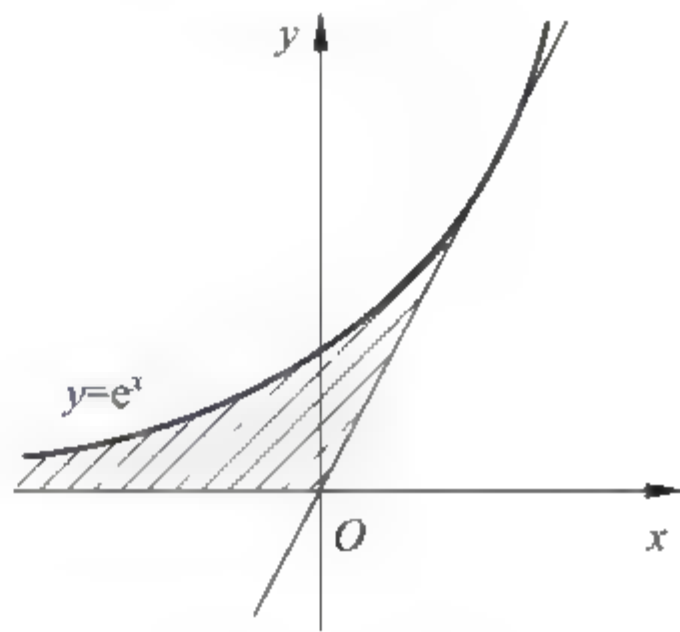


图 5-24

26. 求由下列已知曲线所围成的图形, 按指定的轴旋转所产生的旋转体的体积:

(1)  $y = e^x$  与  $x = 1, y = 1$  所围成的图形, 分别绕  $x$  轴,  $y$  轴;

(2)  $x^2 + (y - 5)^2 \leq 16$ , 绕  $x$  轴.

解 (1) 画草图 5-25(a).

$$V_x = \pi \int_0^1 (e^x)^2 dx - \pi = \frac{1}{2} \pi (e^2 - 3),$$

$$\begin{aligned} V_y &= \pi(e-1) - \pi \int_1^e (\ln y)^2 dy = \pi(e-1) - \pi \left[ (\ln y)^2 y \Big|_1^e - 2 \int_1^e \ln y dy \right] \\ &= \pi(e-1) - \pi \left[ e - 2y \ln y \Big|_1^e + 2 \int_1^e dy \right] = \pi(e-1) - \pi[e - 2e + 2e - 2] = \pi. \end{aligned}$$

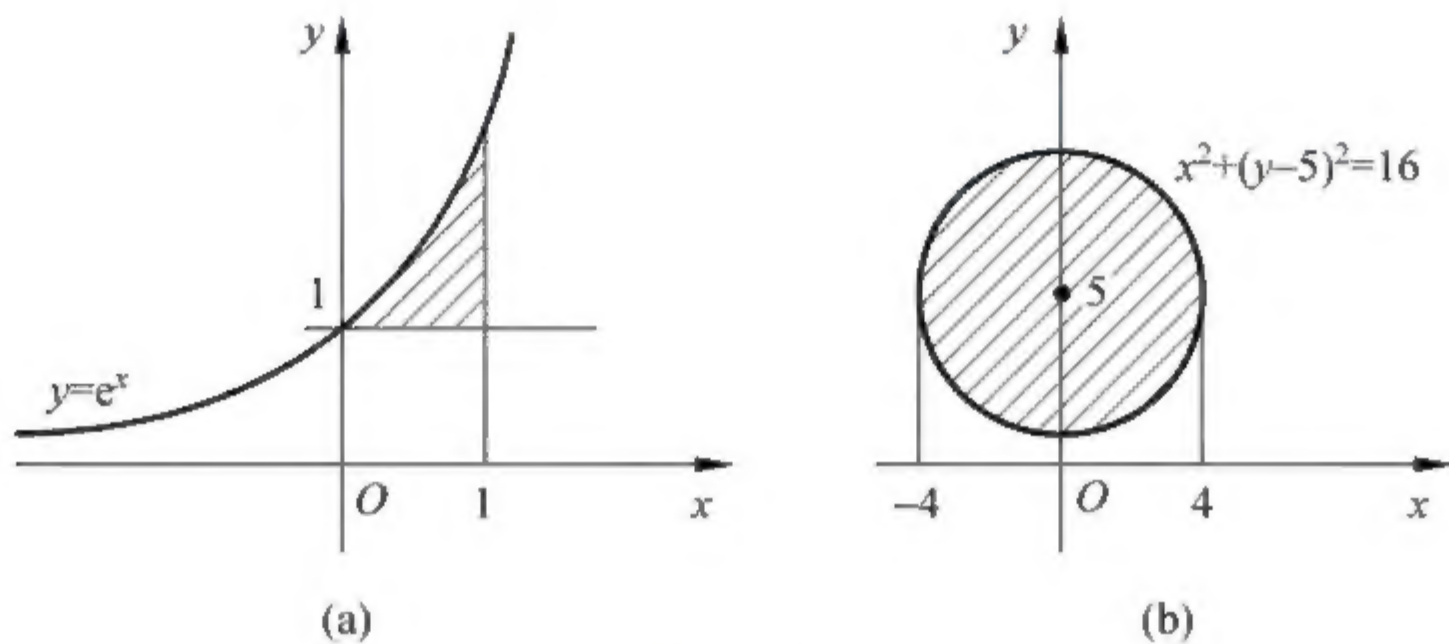


图 5-25

(2) 画草图 5-25(b).

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_{-4}^4 (5 + \sqrt{16-x^2})^2 dx - \pi \int_{-4}^4 (5 - \sqrt{16-x^2})^2 dx = 20\pi \int_{-4}^4 \sqrt{16-x^2} dx \\ &= 20\pi \cdot \frac{\pi 4^2}{2} = 160\pi^2. \end{aligned}$$

27. 求曲线  $y=4-x^2$  及  $y=0$  所围成的图形绕直线  $x=3$  旋转所得旋转体的体积.

解 画草图 5-26, 取  $y$  为积分变量,  $y \in [0, 4]$ . 由前面常用的方法, 所求体积为曲边梯形  $ABDE$  绕  $x=3$  旋转所得旋转体的体积  $V_2$  减去由曲边梯形  $ACDE$  绕  $x=3$  旋转所得旋转体的体积  $V_1$ , 其体积元素分别为

$$dV_2 = \pi(3 + \sqrt{4-y})^2 dy, \quad dV_1 = \pi(3 - \sqrt{4-y})^2 dy.$$

所求体积为

$$\begin{aligned} V &= V_2 - V_1 = \pi \int_0^4 (3 + \sqrt{4-y})^2 dy - \pi \int_0^4 (3 - \sqrt{4-y})^2 dy \\ &= 12\pi \int_0^4 \sqrt{4-y} dy = 64\pi. \end{aligned}$$

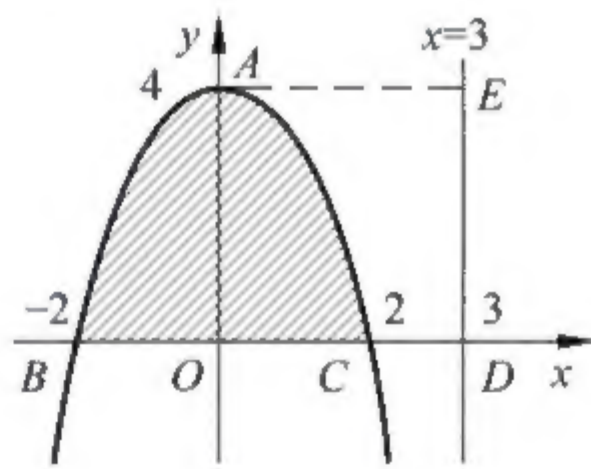


图 5-26

注 (1) 此题的旋转轴不是  $y$  轴, 而是直线  $x=3$ , 因此, 在确定体积元素  $dV$  时, 旋转半径不是曲边到  $y$  轴的距离, 而是曲边到直线  $x=3$  的距离.

(2) 此题也可看成平行截面面积为已知的立体的情况. 解法如下:

过  $y$  轴上一点  $y$  ( $0 < y < 4$ ) 作垂直于  $y$  轴的平行截面, 截得一个圆环面, 其面积为

$$\begin{aligned} A(y) &= \pi(3-x_2)^2 - \pi(3-x_1)^2 = \pi(3 + \sqrt{4-y})^2 - \pi(3 - \sqrt{4-y})^2 \\ &= 12\pi\sqrt{4-y}, \end{aligned}$$

所求体积为  $V = \int_0^4 A(y) dy = \int_0^4 12\pi\sqrt{4-y} dy = 64\pi$ .

28. 设抛物线  $L: y = -bx^2 + a$  ( $a > 0, b > 0$ ), 确定常数  $a, b$  的值, 使得

(1)  $L$  与直线  $y = x + 1$  相切;

(2)  $L$  与  $x$  轴所围图形绕  $y$  轴旋转所得旋转体的体积最大.

解 (1) 设切点为  $(x_0, 1+x_0)$ . 因为  $y' = -2bx$ , 所以  $-2bx_0 = 1$ , 又  $(x_0, 1+x_0)$  在抛物线上, 所以  $1+x_0 =$



$-bx_0^2+a$ , 由  $\begin{cases} -2bx_0=1, \\ 1+x_0=-bx_0^2+a \end{cases}$ , 解得  $a=1-\frac{1}{4b}$ .

(2)  $L$  与  $x$  轴所围图形绕  $y$  轴旋转所得旋转体的体积为

$$V = \int_0^a \pi \frac{a-y}{b} dy = \int_0^a \pi 4(1-a)(a-y) dy = 4\pi(1-a) \frac{a^2}{2} = 2\pi a^2(1-a),$$

$$V' = -2\pi(3a^2 - 2a), \text{ 令 } V' = 0, \text{ 得 } a = \frac{2}{3}, \text{ 于是 } b = \frac{3}{4}.$$

29. 已知生产某产品  $x$  单位时的边际收入为  $R'(x) = 100 - 2x$  (元/单位), 求生产 40 单位时的总收入及平均收入, 并求再增加生产 10 个单位时所增加的总收入.

解 由变上限定积分公式  $R(x) = \int_0^x R'(t) dt$  直接求出

$$R(40) = \int_0^{40} (100 - 2x) dx = (100x - x^2) \Big|_0^{40} = 2400 \text{ (元)},$$

$$\text{平均收入 } \frac{R(40)}{40} = \frac{2400}{40} = 60 \text{ (元)}.$$

在生产 40 单位后再生产 10 单位所增加的总收入可由增量公式求得

$$\Delta R = R(50) - R(40) = \int_{40}^{50} R'(x) dx = \int_{40}^{50} (100 - 2x) dx = (100x - x^2) \Big|_{40}^{50} = 100 \text{ (元)}.$$

30. 已知某产品的边际收入  $R'(x) = 25 - 2x$ , 边际成本  $C'(x) = 13 - 4x$ , 固定成本为  $C_0 = 10$ , 求当  $x = 5$  时的毛利和纯利.

解 方法一 由边际利润  $L'(x) = R'(x) - C'(x) = (25 - 2x) - (13 - 4x) = 12 + 2x$ .

可求得  $x = 5$  时的毛利为  $\int_0^5 L'(t) dt = \int_0^5 (12 + 2t) dt = (12t + t^2) \Big|_0^5 = 85$ ;

当  $x = 5$  时的纯利为  $L(5) = \int_0^5 L'(t) dt - C_0 = 85 - 10 = 75$ .

方法二 总收入  $R(5) = \int_0^5 R'(t) dt = \int_0^5 (25 - 2t) dt = (25t - t^2) \Big|_0^5 = 100$ ,

总成本  $C(5) = \int_0^5 C'(t) dt + C_0 = \int_0^5 (13 - 4t) dt + 10 = (13t - 2t^2) \Big|_0^5 + 10 = 25$ , 所以纯利为

$$L(5) = R(5) - C(5) = 100 - 25 = 75,$$

毛利  $L(5) + C_0 = 75 + 10 = 85$ .

31. 已知需求函数  $D(Q) = (Q - 5)^2$  和消费函数  $S(Q) = Q^2 + Q + 3$ . 求:

(1) 平衡点; (2) 平衡点处的消费者剩余; (3) 平衡点处的生产者剩余.

解 (1) 为了求平衡点, 令  $D(Q) = S(Q)$ , 并求解如下方程  $(Q - 5)^2 = Q^2 + Q + 3$ , 解之得  $Q = 2$ , 即  $Q^* = 2$ . 把  $Q = 2$  代入  $D(Q)$ , 则  $P^* = D(2) = (2 - 5)^2 = 9$ , 因此, 平衡点是  $(2, 9)$ .

(2) 平衡点处的消费者剩余是

$$\int_0^{Q^*} D(Q) dQ - P^* Q^* = \int_0^2 (Q - 5)^2 dQ - 2 \cdot 9 = \frac{(Q - 5)^3}{3} \Big|_0^2 - 18 = \frac{44}{3} \approx 14.67.$$

(3) 平衡点处的生产者剩余是

$$P^* Q^* - \int_0^{Q^*} S(Q) dQ = 2 \times 9 - \int_0^2 (Q^2 + Q + 3) dQ = 18 - \left( \frac{Q^3}{3} + \frac{Q^2}{2} + 3Q \right) \Big|_0^2 = \frac{22}{3} \approx 7.33.$$

### 自测题 5 答案

1. 解 (1)  $\int_a^b f'(2x) dx = \frac{1}{2} \int_a^b f'(2x) d(2x) = \frac{1}{2} f(2x) \Big|_a^b = \frac{1}{2} [f(2b) - f(2a)]$ ;

(2)  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3 + \sqrt{1 + \cos^4 x} \sin x) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3 dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos^4 x} \sin x dx = 3\pi + 0 = 3\pi$ ;



$$\begin{aligned} (3) \quad \frac{d}{dx} \left( \int_{x^2}^0 x \cos t dt + \int_0^1 t \cos t dt \right) &= \frac{d}{dx} \left( x \int_{x^2}^0 \cos t dt \right) = \int_{x^2}^0 \cos t dt - 2x^2 \cos x \\ &= \sin t \Big|_{x^2}^0 - 2x^2 \cos x = -\sin x^2 - 2x^2 \cos x^2; \end{aligned}$$

$$(4) \quad \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2} dx = \int_0^{+\infty} \arctan x d\arctan x = \frac{(\arctan x)^2}{2} \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi^2}{8};$$

$$(5) \quad \int_0^{\frac{1}{c}} (x^2 - cx^3) dx = \left( \frac{x^3}{3} - c \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^{\frac{1}{c}} = \frac{1}{12c^3} = \frac{2}{3}, \text{ 解得 } c = \frac{1}{2}.$$

2. 解 (1) 因为  $3 < x < 4$  时  $\ln x > 1$ , 所以  $\ln^2 x < \ln^4 x$ , 故  $\int_3^4 \ln^2 x dx < \int_3^4 \ln^4 x dx$ , 即  $I_1 < I_2$ , 故选 B.

$$\begin{aligned} (2) \quad \text{因为 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \int_0^{x^2} \cos t^2 dt}{\sin^{10} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \int_0^{x^2} \cos t^2 dt}{x^{10}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 2x \cos x^4}{10x^9} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^4}{5x^8} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^8}{5x^8} = \frac{1}{10}, \end{aligned}$$

所以  $f(x)$  是  $g(x)$  的同阶但非等价无穷小, 故选 B.

$$(3) \quad F'(x) = \left( \int_{x^2}^{e^{-x}} f(t) dt \right)' = -e^{-x} f(e^{-x}) - 2xf(x^2), \text{ 故选 A.}$$

(4) 设  $F(x) = \int_a^x f(t) dt + \int_b^x \frac{1}{f(t)} dt$ , 则  $F(a) = \int_b^a \frac{1}{f(t)} dt < 0$ ,  $F(b) = \int_a^b f(t) dt > 0$ , 由零点存在定理得  $F(x) = 0$  在区间  $(a, b)$  内的至少有一根, 而  $F'(x) = f(x) + \frac{1}{f(x)} > 0$ ,  $F(x)$  单调增, 所以只有一根, 故选 B.

(5) 因为  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续,  $\int_a^b f(x) dx$  存在, 但  $\int_a^b f(x) dx$  存在,  $f(x)$  在  $[a, b]$  上不一定连续, 有可能有有限个间断点, 故选 B.

$$3. \text{ 解 } (1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \sin^{\frac{3}{2}} t dt}{\int_0^x t(t - \sin t) dt} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin^3 x}{x(x - \sin x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x^2}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12x}{\sin x} = 12.$$

(2) 由于  $\sqrt{1+x^4} - 1 \sim \frac{1}{2}x^4$ , 则

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin^2 x} \ln(1+t) dt}{\sqrt{1+x^4} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin^2 x} \ln(1+t) dt}{\frac{1}{2}x^4} = \frac{0}{0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sin^2 x) \cdot 2\sin x \cos x}{2x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u) \sim u}{\frac{1}{2}x^4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x \cdot 2\sin x \cos x}{2x^3} = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \text{ 解 } (1) \quad \int_0^4 x e^{\sqrt{x}} dx &\stackrel{\sqrt{x}=t}{=} \int_0^2 t^2 e^t 2t dt = 2 \int_0^2 t^3 e^t dt = 2 \left( t^3 e^t \Big|_0^2 - 3 \int_0^2 t^2 e^t dt \right) \\ &= 2 \left[ 8e^2 - 3 \left( t^2 e^t \Big|_0^2 - 2 \int_0^2 t e^t dt \right) \right] = 16e^2 - 24e^2 + 12 \int_0^2 t e^t dt \\ &= -8e^2 + 12(te^t - e^t) \Big|_0^2 = 4e^2 + 12. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \int_{-2}^2 \frac{x+|x|}{2+x^2} dx &= \int_{-2}^2 \frac{x}{2+x^2} dx + \int_{-2}^2 \frac{|x|}{2+x^2} dx = 0 + 2 \int_0^2 \frac{x}{2+x^2} dx = \int_0^2 \frac{d(2+x^2)}{2+x^2} \\ &= \ln(2+x^2) \Big|_0^2 = \ln 6 - \ln 2 = \ln 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\cos x} dx &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2} \left| \cos^2 \frac{x}{2} \right| dx = \int_0^{\pi} \sqrt{2} \cos \frac{x}{2} dx + \int_{\pi}^{2\pi} \sqrt{2} \cos \frac{x}{2} dx \\
 &= 2\sqrt{2} \left( \sin \frac{x}{2} \Big|_0^{\pi} + \sin \frac{x}{2} \Big|_{\pi}^{2\pi} \right) = 4\sqrt{2}.
 \end{aligned}$$

5. 设  $t = x - 1$ , 则  $dx = dt$ , 于是

$$\int_{\frac{1}{2}}^2 f(x-1) dx = \int_{-\frac{1}{2}}^1 f(t) dt = \int_{-\frac{1}{2}}^0 (1+t^2) dt + \int_0^1 e^{-t} dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{8} - e^{-x} \Big|_0^1 = \frac{37}{24} - \frac{1}{e}.$$

6. 解 面积微元: (1)  $x \in [-2, 0]$ ,  $dA_1 = (x^3 - 6x - x^2) dx$ , (2)  $x \in [0, 3]$ ,  $dA_2 = (x^2 - x^3 + 6x) dx$ . 故所求面积为  $A = \int_{-2}^0 dA_1 + \int_0^3 dA_2 = \int_{-2}^0 (x^3 - 6x - x^2) dx + \int_0^3 (x^2 - x^3 + 6x) dx = \frac{253}{12}$ .

7. 解 解方程组求交点:  $\begin{cases} y = 2 - x^2, \\ y = x, \end{cases}$  得交点坐标  $A(1, 1)$ .

从而可求得绕  $x$  轴和绕  $y$  轴旋转所得的旋转体体积

$$V_x = \pi \int_0^1 (2 - x^2)^2 dx - \pi \int_0^1 x^2 dx = \pi \int_0^1 (4 - 5x^2 + x^4) dx = \pi \left( 4x - \frac{5}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 \right) \Big|_0^1 = \frac{38}{15}\pi,$$

$$V_y = \int_0^1 \pi y^2 dy + \int_1^2 \pi (2 - y) dy = \frac{1}{3}\pi y^3 \Big|_0^1 + \pi \left( 2y - \frac{1}{2}y^2 \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{3}\pi + \frac{1}{2}\pi = \frac{5}{6}\pi.$$

8. 解  $I'(x) = x(1 + 2\ln x)$ , 令  $I'(x) = 0$ , 得驻点  $x = 0, x = e^{-1/2} \approx 6.03$ , 且  $I'(x)$  在  $[1, e]$  是恒大于 0, 故  $I(x)$  在  $[1, e]$  上单调增加.

当  $x = 1$  时,  $I(x)$  取最小值, 最小值为  $I(1) = 0$ ; 当  $x = e$  时,  $I(x)$  取最大值, 最大值为  $I(e)$ .

$$I(e) = \int_1^e t(1 + 2\ln t) dt = \int_1^e (t + 2t\ln t) dt = \frac{1}{2}t^2 \Big|_1^e + 2 \left( \frac{1}{2}t^2 \ln t \Big|_1^e - \frac{1}{4}t^2 \Big|_1^e \right) = e^2,$$

即最大值  $I(e) = e^2$ , 最小值  $I(1) = 0$ .

9. 证明 因为  $f(x)$  是以 2 为周期的周期函数, 所以  $\int_x^{x+2} f(t) dt = \int_0^2 f(t) dt$ , 于是

$$\begin{aligned}
 G(x+2) &= 2 \int_0^{x+2} f(t) dt - (x+2) \int_0^2 f(t) dt \\
 &= 2 \int_0^x f(t) dt + 2 \int_x^{x+2} f(t) dt - x \int_0^2 f(t) dt - 2 \int_0^2 f(t) dt \\
 &= 2 \int_0^x f(t) dt + 2 \int_0^2 f(t) dt - x \int_0^2 f(t) dt - 2 \int_0^2 f(t) dt \\
 &= 2 \int_0^x f(t) dt - x \int_0^2 f(t) dt = G(x),
 \end{aligned}$$

即  $G(x)$  是以 2 为周期的周期函数.